Подсчет двумя способами в графах

0. а) Клетки таблицы 7×8 (7 строк, 8 столбцов) заполнены нулями и единицами. В каждом столбце – по 4 единицы, во всех строках, кроме последней – по 5 единиц. Сколько единиц в последней строке?
б) На танцплощадке 10 девчонок и 9 ребят. Каждый раз танцевали пары из девушки с парнем. Каждый парень потанцевал с 5 девушками. 7 девушек потанцевали с четырьмя парнями каждая, ещё одна – с 8 парнями. Со сколькими парнями танцевала 10-я девушка?

Теорема 1. а) Сумма степеней вершин графа равна удвоенному числу рёбер.
б) В конечном графе число вершин нечётной степени четно.

2. а) В каждую клетку клетчатого прямоугольника $m \times n$ вписали число его соседей по стороне. Найдите сумму всех этих чисел.
б) Петя по одной вписывает числа в клетки шахматной доски. Каждый раз он пишет число уже заполненых соседей по стороне. Когда все клетки заполнены, он считает сумму всех выписанных чисел. Докажите, что сумма не зависит от порядка заполнения клеток и найдите её.

3. На доске 11×10 (11 строк, 10 столбцов) расставлены фишки. Может ли во всех строках быть разное количество фишек, а во всех столбцах – одинаковое?

4. В однокруговом шахматном турнире участвовало 16 школьников, причем мальчиков больше чем девочек. Каждый с каждым сыграл по разу. Половина партий была между мальчиками и девочками. Сколько девочек участвовали в турнире? (В однокруговом турнире каждый с каждым играет по разу)

5. 1000 шариков раскрасили в 7 цветов радуги. На каждом шаре написали общее количество шаров такого же цвета, как и этот. Чему может быть равна сумма чисел, обратных написанным?

6. Десять мальчиков и десять девочек участвовали в однокруговом турнире по теннису. Все мальчики одержали поровну побед. За каждую победу над мальчиком девушке дарили цветок. Могло ли по окончании турнира у всех девочек оказаться поровну цветов? (В теннисе нет ничьих)

7. Для каждого натурального числа, начиная с 1, подсчитали количество детей в Сириусе, возраст которых не меньше этого числа. Полученные результаты сложили. Докажите, что итог равен сумме возрастов детей в Сириусе.

8. На бал пришло 20 детей. В каждом танце участвовало двое — мальчик и девочка. Оказалось, что десятеро из них танцевали с тремя партнёрами, двое (Саша и Женя) — с пятью и остальные восемь — с шестью. Докажите, что Саша и Женя разного пола.

9. В летнюю школу приехали всего 34 школьника. В течение смены каждый из них пожал руки другим участникам 78 раз. Могло ли оказаться, что рукопожатий между мальчиками и девочками было ровно половина от общего числа рукопожатий?

10. Всех семиклассников два раза разбивали на команды: первый раз для игры в «Абаку», второй – в «Что-где-когда». Размеры команд в каждой игре не обязательно одинаковы, но в каждой команде есть хотя бы один участник. Оказалось, что каждый участник играл в « Что-где-когда » в не меньшей по численности команде, чем в «Абаку». Докажите, что в «Абаку» играло не меньше команд, чем в « Что-где-когда».

Для самостоятельного решения

ДС1. Ковбои всегда говорят правду знакомым и лгут незнакомым. Собрались как-то 50 ковбоев, и каждый сказал каждому из присутствующих одну из двух фраз: «У меня чётное число знакомых в этой компании» или «У меня нечётное число знакомых в этой компании».

а) Могло ли оказаться, что первая фраза произнесена ровно 2015 раз?

б) Могло ли оказаться, что первая фраза произнесена ровно 2016 раз?

в) Какое наибольшее количество раз могла быть произнесена первая фраза?

ДС2. В корзинах лежали разные по весу фрукты. Их переложили в ящики. Каждый фрукт попал в ящик, где общий вес фруктов больше, чем в корзине, где он был. Докажите, что корзин больше, чем ящиков.

ДС3. На шахматную доску по одному выставляются короли: первый – на любую клетку, а каждый следующий должен побить нечетное число ранее выставленных королей. Можно ли заполнить все клетки доски?