

Разворачивание сумм и произведений

Легко вычислить сумму многих слагаемых, когда все они одинаковы: сложение заменяется на умножение. А если слагаемые разные? Тогда можно попытаться разбить их на группы с одинаковыми суммами. Если это получится, то количество слагаемых перестанет быть важным. Когда есть слагаемые разных знаков, полезно выделить группы с нулевой суммой и отбросить их.

Упр1. Найдите алгебраическую сумму $1-2+3-4+\dots-998+999-1000$.

Упр2. Найдите сумму дробей $1/999 + 2/999 + 3/999 + \dots + 998/999$.

Конечно, в большинстве сумм слагаемые так просто не сгруппируешь. Однако часто группировка становится возможной после разбиения слагаемых «на части», то есть представления каждого из данных слагаемых в виде суммы или разности. Понятно, что такое представление может быть сделано многими способами. Сумейте выбрать части так, чтобы их было удобнее группировать. Аналогичный прием помогает считать «длинные» произведения.

Упр3. Найдите произведение $(1+1/2) \cdot (1+1/3) \cdot (1+1/4) \cdot \dots \cdot (1+1/100)$.

Метод телескопических сумм как раз и состоит в представлении каждого слагаемого в виде разности так, чтобы почти все члены «развернутой» суммы взаимно уничтожились с соседями. Кажется, что он применим только к небольшому списку искусственно подобранных сумм. Однако, если мы «подозреваем» формулу $F(n)$ для суммы n первых членов, это немедленно дает нам представление n -го члена как разности $F(n)-F(n-1)$. Например, чтобы доказать формулу $1+3+5+\dots+(2n-1)=n^2$, запишем сумму как $1+(2^2-1^2)+(3^2-2^2)+\dots+(n^2-(n-1)^2) = (1-1^2)+(2^2-2^2)+(3^2-3^2)+\dots+((n-1)^2-(n-1)^2)+n^2 = n^2$. Точно так же можно вычислять и *телескопические произведения*.

Задача 4. Найдите сумму $1/1 \cdot 2 + 1/2 \cdot 3 + 1/3 \cdot 4 + \dots + 1/99 \cdot 100$.

Задача 5. Найдите произведение $(1-1/4) \cdot (1-1/9) \cdot (1-1/16) \cdot \dots \cdot (1-1/10000)$.

Задача 6. Докажите, что $1 \cdot 2 + 2 \cdot 3 + 3 \cdot 4 + \dots + n \cdot (n+1) = n(n+1)(n+2)/3$.

Задача 7. Докажите, что при $m > 3$ выполнено неравенство $2^m < m!$.

Задача 8. При каких натуральных m выполнено неравенство $3^m > 7m^2$?

Задача 9. Найдите формулу для суммы $1 \cdot 1! + 2 \cdot 2! + 3 \cdot 3! + \dots + n \cdot n!$ и докажите её.

Для самостоятельного решения.

РС1. Найдите сумму $1 \cdot 4 + 2 \cdot 5 + 3 \cdot 6 + \dots + 100 \cdot 103$.

РС2. Найдите формулу для суммы $1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + n^2$ и докажите её.

РС3. Докажите, что $1/1^2 + 1/2^2 + 1/3^2 + \dots + 1/n^2 < 2$.