

Ослабление условий

Лучше синица в руках, чем журавль в небе.

Дом, пригодный для жилья, строят не сразу: сначала возводят коробку, а окна, двери, отделку добавляют потом. Этот приём называется *постепенное конструирование*: сложный пример строят за несколько шагов, получая цепочку вспомогательных конструкций (*заготовок*). На каждом шаге очередная конструкция *улучшается* до следующей. А как правильнее выбирать заготовки? Какими свойствами они должны обладать?

Искомую конструкцию сложно найти из-за слишком жестких требований. Удобнее строить заготовку, где требования удовлетворены лишь частично. Оставляем *принципиальные* условия, отказываемся или ослабляем *технические*. Попросите определить, какие именно условия в том или ином решении оказались принципиальными, а какие – техническими. Как можно было догадаться именно так разделить условия?

1. а) Придумайте три различных натуральных числа, чтобы каждое делилось на разность двух других, и все разности были различны;
б) то же, но все числа больше 100;
в) как в (б), но все разности меньше самого маленького из чисел.

2. Можно ли, не отрывая карандаша от бумаги и не проводя линий дважды, нарисовать изображенную на рис. 1 фигуру, если пересекать уже нарисованные линии нельзя? (Касаться можно).

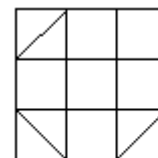


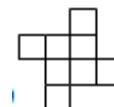
Рис. 1

3. Разбейте квадрат на треугольники так, чтобы каждый граничил ровно с тремя другими по отрезку ненулевой длины.

4. Подставьте в знаменатели вместо звёздочек различные натуральные числа, чтобы равенства были верными: а) $\frac{1}{*} + \frac{1}{*} = \frac{1}{*} + \frac{1}{*}$; б) $\frac{1}{*} + \frac{1}{*} + \frac{1}{*} + \frac{1}{*} = \frac{1}{*} + \frac{1}{*} + \frac{1}{*}$.

5. Отметьте на плоскости 6 точек так, чтобы на расстоянии 1 от каждой находились ровно 3 отмеченные точки.

6. Многоугольником (см. рис. справа), перегибая его по границам клеток, можно *обернуть* квадрат 2×2 , то есть покрыть все клетки квадрата в один слой с двух сторон. Можно ли каким-нибудь многоугольником из 200 клеток с периметром 400 обернуть квадрат 10×10 ?



7. Существуют ли такие натуральные числа $a_1 > a_2 > a_3 > \dots > a_{10}$, что $\text{НОД}(a_1, a_2) < \text{НОД}(a_2, a_3) < \dots < \text{НОД}(a_9, a_{10})$?

8. а) Приведите пример треугольника, где все стороны и высоты измеряются целым числом сантиметров.

б) Могут ли в остроугольном треугольнике все стороны и высоты измеряться целым числом сантиметров?

9. Докажите, что существует палиндром, делящийся на

а) на 5^{100} ; б) на 6^{100} (Напомним, что *палиндром* – это число, которое не меняется при записи его цифр в обратном порядке)

10. Есть 10 двузначных чисел. Докажите, что из них можно выбрать два непересекающихся набора с одинаковыми суммами.

11. Приведите пример таблицы 3×3 , заполненной девятью различными натуральными числами так, чтобы произведения в столбцах были равны, и суммы в строках тоже были равны (но суммы могут отличаться от произведений).