

Правило умножения и деление в комбинаторике

Как ты так быстро понял, что в стаде 77 овец? – Сосчитал ноги и поделил на 4!

Если объекты можно разместить по одному во всех клетках таблицы $m \times n$, то их mn .

1. На хоккейный матч ЛХК-Сириус прибыли 3 тренера ЛХК, 12 игроков ЛХК и 20 игроков Сириуса. После матча хоккейные команды ЛХК и Сириус обменялись рукопожатиями: каждый игрок и тренер ЛХК по разу пожал руку каждому игроку Сириуса. Сколько всего рукопожатий было сделано после матча?
2. В произведении $(a+b+c+\dots+j)(k+l+\dots+z)$ использованы по разу все 26 букв латинского алфавита. Сколько будет слагаемых после раскрытия скобок?

Если считаем упорядоченные пары объектов, и для каждого из m начал пары есть ровно n концов (даже при разных наборах концов для разных начал), то всего есть mn пар.

3. В Кругляндии все 20 городов стоят на кольцевой железной дороге, и из любого города X летают авиарейсы в любой другой город, кроме соседей X на кольце. Шпион хочет заранее купить по билету в один конец на каждый рейс. Сколько билетов ему надо купить?
4. Во вписанном 26-угольнике $ABCD\dots YZ$ проведена диагональ EX . Сколько диагоналей пересекают EX внутри круга?

Аналогично для упорядоченных троек: при p вариантах начала, q – середины (независимо от начала) и r – конца (независимо от начала и середины) всего есть pqr троек.

5. Сколько будет слагаемых после раскрытия скобок в произведении $(a+b+c+d+e)(p+q+r+s+t)(u+v+w+x+y+z)$?
6. У скольких трехзначных чисел в записи нет цифры 5?
7. У скольких трехзначных чисел сумма цифр не делится на 5?

Бывает выгодно сосчитать все объекты по k раз (например, все дважды или все трижды), а потом на это k поделить.

8. Сколько диагоналей во вписанном в окружность а) 13-угольнике; б) N -угольнике?
9. На поверхности прямоугольного кирпича нарисованы линии так, что каждая грань разбита на квадраты со стороной 1 см. Докажите, что общая длина границ квадратов (она состоит из проведенных линий и всех ребер кирпича) равна $2S$ см, где S – площадь поверхности кирпича в см^2 .
10. Во всех вершинах куба записано по синему числу. Для каждой вершины X посчитали сумму синих чисел в вершинах, связанных с X ребром. Эту сумму записали в X красным цветом. Чему равна сумма синих чисел, если сумма красных равна 111?
11. а) На встречу в ООН между Ливией и Боливией прибыло 20 дипломатов. Каждый ливиец пожал руку каждому боливийцу. Каково наибольшее возможное число рукопожатий?
б) То же вопрос для встречи между Данией и Иорданией, где участвовало 49 дипломатов.

Разной

12. а) Дана диагональ правильного 10 угольника. Сколько диагоналей пересекают её внутри 10-угольника под углом в 36° ?
б) А сколько пар диагоналей в правильном 10-угольнике пересекаются внутри 10-угольника под углом в 36° ?
13. В магическом квадрате 3×3 расставлены числа 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14 и 15. В каждом столбце, каждой строке и на обеих диагоналях суммы одинаковы. Какое число может быть в центре квадрата?
14. а) На числовой прямой отмечены точки с координатами 0, 1, 2, 3, ..., 100. Сколько всего есть отрезков нечетной длины с концами в этих точках?
б) На числовой прямой отмечены 25 точек с целыми координатами. Каково наибольшее возможное число отрезков нечетной длины с концами в этих точках?
15. На поверхности кубика Рубика $3 \times 3 \times 3$ вначале все клетки не заполнены. Петя вписывает в клетки числа по одному по такому правилу: он пишет в клетку количество её соседей, уже заполненных к этому моменту числами (соседи – это клетки с общей стороной). Если заполненных соседей нет, он пишет 0. Порядок заполнения Петя выбирает сам. Когда все 54 клетки заполнены, Петя суммирует все вписанные числа. Какую сумму он может получить?

