

Счет узких мест

Сколько пассажиров может перевезти поезд – зависит от числа мест. А как быстро пассажиры смогут высадиться – зависит от числа дверей. Точно так же, и в задаче можно получить искомую оценку, выделив узкие места и подсчитав их количество.

1. Какое наибольшее число слонов можно расставить на клетчатой доске 4×7 так, чтобы они не били друг друга?
2. Обезьяна становится счастливой, когда съедает 3 разных фрукта. Какое наибольшее количество обезьян можно осчастливить, имея 20 груш, 30 бананов, 40 персиков и 50 мандаринов?
3. Сумма трех натуральных чисел равна 520. На какое наибольшее число нулей может оканчиваться их произведение?

Узким местом может быть подмножество элементов данной или искомой конструкции. Выделить такое подмножество позволяют принцип крайнего и раскраска.

4. Какое наименьшее число слонов может побить все свободные клетки доски 4×10 ?
5. а) Было 100 карточек с надписями «Слева от меня – ровно 1 ложное утверждение», «Слева от меня – ровно 2 ложных утверждения», ..., «Слева от меня – ровно 100 ложных утверждений». Петя разложил карточки в ряд слева направо в каком-то порядке. Какое наибольшее число утверждений могло оказаться истинными? б) То же, но вместо «слева» везде написано «с одной стороны».
6. 30 студентов с 5 курсов придумали 40 задач для олимпиады (каждый – хотя бы одну), причем однокурсники придумали по одинаковому числу задач, а студенты с разных курсов – по разному. Сколько студентов придумали по одной задаче?

Часто узкое место может быть выделено далеко не однозначно, или места выбираются последовательно. Это, впрочем, обычно не меняет подсчетов.

7. Какое наименьшее число королей может побить все свободные клетки доски 8×8 ?
8. Правильный треугольник со стороной 100 разбит на треугольные клетки со стороной 1. Каким наименьшим числом прямых можно зачеркнуть все вершины клеток?

Узкое место может быть создано и добавлением объектов. В этом случае их надо связать с данной в задаче конструкцией.

9. Какое наибольшее число ладей можно расставить на шахматной доске так, чтобы каждая ладья била не более трех других?

Разнобой

10. Отмечены вершины всех клеток доски $N \times N$. Каким наименьшим числом прямых не параллельных краям доски можно зачеркнуть все отмеченные точки?
11. Каким наименьшим числом прямых можно разрезать все клетки шахматной доски 3×3 ? Нарисуйте такие прямые и докажите, что меньшим числом прямых обойтись нельзя. (Чтобы клетка была разрезана, прямая должна проходить через внутреннюю точку этой клетки.)
12. За одно нажатие можно число на экране калькулятора увеличить на его дробную часть (например, из $3/7$ получить $6/7$, а из $3,8$ получить $3,8 + 0,8 = 4,6$). Начав с положительного числа, меньшего 1, за 10 нажатий получили число 10. С какого числа начали?

13. а) У Пети есть 8 белых кубиков $1 \times 1 \times 1$. Он хочет сложить из всех них куб снаружи полностью белый. Какое наименьшее число граней кубиков должен закрасить Вася, чтобы помешать Пете? б) То же про 27 кубиков.
14. Какое наименьшее количество квадратиков 1×1 надо нарисовать, чтобы получилось изображение квадрата 25×25 , разделенного на 625 квадратиков 1×1 .

14 сентября 2015 г., 8-й класс профи, Сириус. А.Шаповалов www.ashap.info