Переправы и инварианты

Сколь ни вдоль, а поперек изволь. *Поговорка*

Если объекты или ситуации задачи четко делятся на две категории (два берега, два цвета), и если путь начинается на одном берегу, а заканчивается на другом, то неизбежно придется переправляться.

1. Плоскость раскрашена в два цвета. Докажите, что есть точки разного цвета на расстоянии 1 мм.
2. Можно ли на всех полях шахматной доски расставить коней четырех мастей так, чтобы вороные не били соловых, соловые – гнедых, гнедые – каурых, а каурые – вороных?

Вместо цветов используют значения какой-нибудь величины, например, остатки. Переправа может оказаться ключевым местом решения: надо только суметь привязать к ней вопрос задачи.

3. **а)** Можно ли расставить в таблице 8×8 числа от 1 до 64 так, чтобы ни в какой паре клеток с общей стороной или вершиной сумма не делилась на 4?
   б) Можно ли расставить в таблице 8×8 различные двузначные числа так, чтобы ни в какой паре клеток с общей стороной или вершиной сумма не делилась на 3?
4. Натуральные числа раскрашены в синий и красный цвета, причем чисел каждого цвета бесконечно много. Докажите, что найдутся синяя и красная пара с одинаковыми суммами.

Типичная ситуация: есть набор позиций (состояний) и переходы между ними. Это можно рассматривать как граф. Пусть с каждой позицией можно связать некоторую величину. Если величина при переходах не меняется, она – инвариант. Значения инварианта разбивают граф на компоненты связности, и нет маршрута между позиций с разными значениями инварианта. Соответственно. можно доказывать невозможность действия: например, нельзя доехать на поезде от Нью-Йорка до Москвы, поскольку поезда из Америки ходят только в Америку. Но можно доказать и существование: если добраться таки удалось, то был либо перелет, либо плавание. Типичные инварианты: четность, общий делитель, сумма.

5. В банке 1100 долларов. Разрешаются две операции: взять из банки 370 долларов или положить в неё 111 долларов. Эти операции можно проводить много раз, при этом, однако, никаких денег, кроме тех, что первоначально лежат в банке, нет. Какую максимальную сумму можно извлечь из банки и как это сделать?
6. Есть три кучки камней: в первой 51 камень, во второй – 49, а в третьей – 5. Разрешается объединять любые кучки в одну, а также разделять кучку, состоящую из четного количества камней, на две равные. Какое наибольшее число кучек можно получить?
7. Клетчатый квадрат 2015×2015 разрезали по границам клеток на прямоугольники (не обязательно одинаковые). Докажите, что найдется прямоугольник, чей периметр делится на 4.

Нечисловые инварианты чаще всего связаны с чередованием или с невозможностью уничтожить элемент с каким-то свойством.

8. Картонный треугольник катают по плоскости, перекатывая через сторону. После 2015 перекатываний он попал в точности на исходное место. Докажите, что треугольник равнобедренный.
9. Маляр-хамелеон ходит по клетчатой доске как шахматная ладья, но только на одну клетку за ход. Попав в очередную клетку, он либо перекрашивается в её цвет, либо перекрашивает клетку в свой цвет. Белого маляра-хамелеона кладут на чёрную доску размерами 8×8 клеток. Сможет ли он раскрасить её в шахматном порядке?
10. Три ладьи стояли на клетках a1, b1 и a2. За несколько ходов они перешли в клетки у противоположного угла доски: с a1 – на h8, с b1 – на h7, с a2 – на g8. Докажите, что после какого-то из ходов какая-то из ладей не била других ладей.

Сириус, 8 профи, А.Шаповалов. 12 сентября 2015 г. www.ashap.info