

Увидеть граф

Определение. У графа G^* , *дополнительного* к графу G , вершины те же, а пара вершин в G^* связана ребром \Leftrightarrow она не связана ребром в G .

Сумма степеней вершин

Факт 1. Сумма степеней вершин графа вдвое больше числа его ребер.

Факт 2. В конечном графе число вершин нечетной степени четно.

1. В 7 клетках сложной из спичек доски 8×8 сидит по жуку. Часть спичек убрали. Жуки по прежнему не могут доползти друг до друга, но у каждого есть ровно три других жука, до каждого из которых он может доползти, преодолев всего одну спичку. Какое наименьшее число спичек могло быть убрано?

2. В пустые клетки доски 5×5 Петя по одному вписывал числа. Вписанное число равнялось количеству соседних по стороне клеток, в которые уже был вписаны числа. Петя заполнил всю доску. Найдите сумму всех чисел и докажите, что она не зависит от порядка заполнения.

3. В однокруговом турнире участвовали 15 команд. К некоторому моменту оказалось, что каждая команда успела сыграть либо 7, либо 10 игр. Докажите, что хотя бы в одном из уже проведенных игр встретились команды, которые перед этой игрой участвовали в сумме в нечетном числе игр этого турнира.

4. На шахматной доске отмечены 6 клеток. *Расстоянием* между клетками назовем наименьшее число ходов короля от одной до другой. Докажите, что можно выбрать три отмеченные клетки так, чтобы либо все попарные расстояния между ними были больше 4, либо все меньше 5.

Считаем ребра в двудольном графе

Факт 3. Сумма степеней белых (черных) вершин равна числу ребер двудольного графа.

Факт 4. а) В двудольном графе с $2n$ вершинами не более n^2 ребер.

б) В двудольном графе с $2n+1$ вершинами не более $n(n+1)$ ребер.

5. Футбольный мяч сшит из 32 лоскутков – шести- и пятиугольников. Пятиугольники между собой не граничат, каждый пятиугольник граничит с пятью шестиугольниками, а каждый шестиугольник – с тремя пятиугольниками и тремя шестиугольниками. Сколько лоскутков пятиугольны?

6. В Островной империи N городов, каждые два соединены либо прямой авиалинией, либо прямой морской линией. Известно, что из города A в город B нельзя добраться авиалиниями (даже с пересадками). Каково наименьшее число междугородних морских линий?

7. **а)** В ряд выписаны 15 целых чисел. Рассматриваются всевозможные попарные разности. Какое наибольшее количество из этих разностей может быть нечетными?

б) В ряд выписаны 20 целых чисел. Каково наибольшее число нечетных последовательных сумм?

8. Даны 10 чисел a_1, a_2, \dots, a_{10} . Известно, что среди попарных сумм $a_i + a_j$ ($i \neq j$) как минимум 37 целых. Докажите, что все числа $2a_1, 2a_2, \dots, 2a_{10}$ – целые.

Зачётные задачи

УГ1. Промежуток из одного или несколько подряд идущих дней назовем *нечетным*, если нечетное число из этих дней были дождливыми. Каково наибольшее возможное число нечетных промежутков в июле?

УГ2. На шахматной доске 50×50 стоят 9 ферзей. Докажите, что из них можно выбрать либо 4 не бьющих друг друга, либо 3 попарно бьющих друг друга. (Ферзи бьют друг друга, если находятся на одной горизонтали, вертикали или диагонали и между ними нет других ферзей).

УГ3. На плоскости проведено n прямых. Каждая пересекается ровно с 55 другими. Найдите n . (Укажите все возможности.)

УГ4. На свободные поля шахматной доски по одному выставляются короли. Первый выставляется произвольно, каждый следующий должен бить нечетное число ранее выставленных. Какое наибольшее число королей можно выставить?

А.Шаповалов. Московские сборы, 12 апреля 2019 г, 9 класс, гр. Винты. www.ashap.info/Mosbory/2019v/index.html