Увидеть граф: чередование, счет вершин и ребер

Чередование

Определение. Граф – *двудольный*, если его вершины можно раскрасить в два цвета так, что не будет ребер с концами одинакового цвета.

Примеры: любое дерево, чётный цикл, шахматная доска как карта, граф коня на шахматной доске.

1. Докажите, что следующие графы – двудольные

а) Вершины графа – расстановка пары фишек на шахматной доске. Две расстановки связаны ребром, если позиции получаются друг из друга ходом фишки на одну клетку по вертикали или горизонтали.

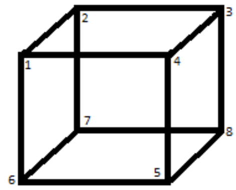
б) Тоже, что (а) для n фишек.

в) Вершины – перестановки из n чисел 1, 2, ..., n, ребра – расположения, получающиеся друг из друга перестановкой двух соседних чисел.

г) Вершины – перестановки из n чисел 1, 2, ..., n, ребра – расположения, получающиеся друг из друга перестановкой двух любых чисел.

д) Граф карты, где все страны – правильные треугольники.

Пути в двудольном графе



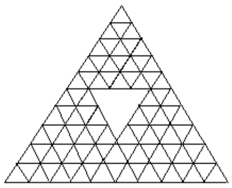
Пусть путь в двудольном графе проходит w раз через вершины одного цвета и b раз через вершины другого цвета.

Факт 1. Если путь замкнут, то w=b.

Факт 2. Если путь не замкнут, то |w-b|≤1.

Факт 3. Если путь без повторов вершин, то его длина ≤2min(w,b)+1

2. Жук прилетел в вершину 1 куба (см. рис.) и стал ползать по его рёбрам, пока не улетел из вершины 8. Известно, что он поворачивал или разворачивался только в вершинах. В вершине 1 он побывал 1 раз, в вершине 2 – 2 раза, …, в вершине 7 – 7 раз. Сколько раз побывал жук в вершине 8?



3. Замок разбит на один большой и много малых треугольных залов (см. рис). В каждой стенке между залами есть дверь. Какое наибольшее число залов сможет обойти турист, не заходя ни в какой зал дважды?

Считаем ребра и степени вершин

Факт 4. Сумма степеней вершин вдвое больше числа рёбер.

Факт 5 (лемма о рукопожатиях). Число вершин нечётной степени чётно.

Факт 6. В двудольном графе сумма степеней вершин любого цвета равна числу ребер.

Факт 7. В двудольном графе с $2n$ вершинами не более n^2 ребер, а с $2n+1$ вершинами – не более $n(n+1)$ ребер.

4. На чистые грани икосаэдра Петя по одному выписывал числа. Вписанное число равнялось количеству соседних по ребру граней, на которые уже был записаны числа. Петя заполнил все грани. Найдите сумму всех чисел и докажите, что она не зависит от порядка заполнения.

5. Промежуток из одного или несколько подряд идущих дней назовем *нечётным*, если нечётное число из этих дней были дождливыми. Каково наибольшее возможное число нечётных промежутков в июле?

6. В шахматном турнире участвовали 111 игроков. К некоторому моменту оказалось, что каждый успел сыграть 6, 7 или 10 партий. Докажите, что хотя бы в одной из уже проведенных партий встретились игроки, которые перед этим в сумме в сыграли нечётное числе партий. (Игроки повторно не встречаются).

7. На плоскости проведено n прямых. Каждая пересекается ровно с 55 другими. Найдите n. (Укажите все возможности.

8. Даны 20 чисел a_1, a_2, …, a_{20}. Известно, что среди попарных сумм a_i+a_j ($i \neq j$) как минимум 150 целых. Докажите, что среди чисел $2a_1$, $2a_2$, …, $2a_{20}$ как минимум 18 целых.

Зачётные задачи

УГ1. а) В кубике Рубика N×N×N отмечены вершины клеток, середины сторон клеток и центры клеток. Центры клеток соединены отрезками с серединами сторон клеток. Можно ли по проведенным отрезкам и сторонам клеток обойти все отмеченные точки, побывав в каждой из них ровно по одному разу?

б) В выпуклом многогграннике отмечены вершины и середины рёбер. Кроме того, внутри каждой грани отмечена точка, из неё проведены отрезки к серединам сторон грани. Можно ли по проведенным отрезкам и сторонам клеток обойти все отмеченные точки, побывав в каждой из них ровно по одному разу?

УГ2. В двух соседних вершинах 100-угольника стоят чёрная и белая фишки. За ход любую одну фишку можно передвинуть в свободную соседнюю вершину (фишки не обязательно ходят по очереди). Нельзя повторять позицию, которая была раньше. Какое наибольшее число ходов может быть сделано?