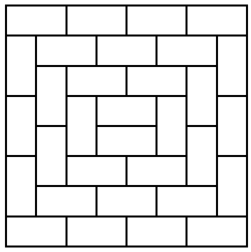
Свяжитесь с графом

Считаем ребра, вершины и компоненты без циклов. Обозначим в графе В – число вершин, Р – число ребер, С – число компонент связности.
Факт 1. а) В дереве (то есть связном графе без циклов) В=Р+1.
б) В графе без циклов В=Р+С
Факт 2. а) В связном графе Р≥В–1. **б)** В любом графе Р≥В–С.

1. В каждой клетке кубика Рубика 3х3х3 проведены по две диагонали. Отмечены все центры и вершины клеток. Можно ли стороны и половинки проведенных диагоналей раскрасить в жёлтый, красный и синий цвета так, чтобы жук мог проползти из любой вершины в любую другую по жёлтым отрезкам, клоп – по красным, а сверчок – по синим?

Увидеть граф за условием задачи помогают *выделенные* пары объектов, в частности, соседние объекты или клетки с общей границей. Выписывая для таких графов уравнения и неравенства для В, Р, С, можно получать нетривиальные оценки.

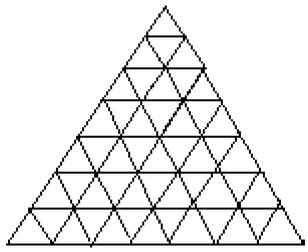


2. На Квадратном континенте все страны – прямоугольники 100x200 км (см. рис). Некоторые страны-соседи поссорились и закрыли для проезда общий участок границы. К счастью, есть возможность проехать из любой страны в любую по суше через территорию других стран. Какова максимальная возможная длина закрытых границ? (Нельзя пересекать границу через точку в углу страны).

3. а) Дворец шаха представляет в квадрат 10x10, разбитый внутренними стенами на квадратные комнаты 1x1. Шах хочет разбить их на 5 связных квартир, снеся как можно меньше внутренних стен длины 1. Сколько стен ему придется снести?
б) То же, но площади квартир должны быть одинаковы, и внутри квартиры не должно быть стен между соседними комнатами.

4. На клетчатой бумаге нарисован многоугольник площадью в n клеток. Его контур идёт по линиям сетки. Каков наибольший периметр многоугольника? (Сторона клетки равна 1).

Для целей задачи можно картинку преобразовать. Например, убрав часть линий, объединить группу клеток в одну вершину.



5. Из спичек сложен треугольник, разбитый на клетки (см. рис). В каждой клетке сидит по жуку, которые через спичку не ползают. Спички внешнего контура намазаны мёдом. Какое наименьшее число спичек надо убрать, чтобы каждый жук мог доползти до спички с мёдом.

6. Шахматную доску покрасили в 33 цвета. Пара различных цветов называется *хорошей*, если можно поставить пару бьющих друг друга коней на две клетки этих цветов. Каково минимальное число хороших пар цветов?

7. Какое наибольшее число клеток шахматной доски можно разрезать по одной диагонали так, чтобы при этом доска не распалась на несколько частей?

8. Из спичек выложена доска 8×8 так, что каждую клетку ограничивают четыре спички. Какое наименьшее число спичек можно убрать, чтобы после этого не осталось ни одного контура прямоугольника?

Зачётные задачи

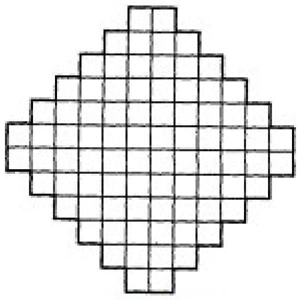


Рис. 9

СГ1. Фигура на рис. 9 разрезана по сторонам клеток на несколько многоугольников, ни один из которых не содержит квадрата 2×2. Каково наименьшее возможное число многоугольников?

СГ2. Клетчатый квадрат 8×8 разрезан по границам клеток на 3 многоугольника одинакового периметра. Найдите наибольшее возможное значение периметра, если сторона клетки равна 1.

СГ3. **а)** На клетчатой бумаге по границам клеток обведен тысячеугольник. Из какого наименьшего числа клеток он может состоять?
б) Тот же вопрос для 666-угольника.

СГ4. Из кубиков 1×1×1 склеен куб 3×3×3. Какое наибольшее количество кубиков можно из него выкинуть, чтобы осталась связная фигура, чья проекция на каждую из граней исходного куба была квадратом 3×3 ?