

Испытания: индукция и графы

Каждое испытание сводит задачу к меньшему числу случаев. Обратный ход от меньшего к большему по индукции получаем искомый алгоритм и нетривиальную рекуррентную оценку на число случаев и другие подобные величины.

1. Незамкнутая цепочка составлена из 31 звена. Известно, что одно из звеньев – фальшивое, легче остальных. Какое наименьшее число звеньев придется разрезать, чтобы при помощи взвешиваний можно найти фальшивое звено?
2. а) Обезьяна хочет определить, из окна какого самого низкого этажа 15-этажного дома нужно бросить кокосовый орех, чтобы он разбился. Сколько бросков потребует обезьяне, чтобы заведомо удовлетворить свое любопытство, если у нее есть два одинаковых ореха?
б) Какое наибольшее число этажей может быть в доме, если обезьяна с двумя орехами может заведомо определить нужный этаж не более чем за n бросков?
3. Банкир узнал, что среди одинаковых на вид и по весу монет одна — фальшивая (более легкая). Он попросил эксперта определить эту монету с помощью чашечных весов без гирь, причем потребовал, чтобы каждая монета участвовала во взвешиваниях не более двух раз. Какое наибольшее число монет может быть у банкира, чтобы эксперт заведомо смог выделить фальшивую за n взвешиваний?

Испытание можно считать ребром графа. Тогда оценка на число ребер в графе позволит оценить число испытаний.

4. Есть n камней разного веса и чашечные весы без гирь. Одним взвешиванием разрешается сравнить два камня. За какое наименьшее число взвешиваний можно наверняка найти самый тяжелый камень?
5. Есть 101 банка консервов весами 1001 г, 1002 г, ..., 1101 г. Этикетки с весами потерялись, но завхозу кажется, что он помнит, какая банка сколько весит. Он хочет убедиться в этом за наименьшее число взвешиваний. Есть грубые чашечные весы без гирь: они показывают, какая чаша тяжелее только если разница больше 1,1 г (а иначе показывают равновесие). За одно взвешивание можно сравнить две банки. Какое наименьшее число взвешиваний понадобится?
6. Есть m болельщиков: некоторые из них (возможно, все или никто) болеют за «Спартак», а остальные – за «Динамо». Разрешается спросить у любых двоих, болеют ли они за разные команды, и они честно ответят «да» или «нет». Требуется посадить болельщиков в два автобуса так, чтобы в каждом были болельщики только одной команды. За какое минимальное количество вопросов это наверняка можно сделать?

Зачётные задачи

ИГ1. Есть $2n$ болельщиков: известно, что ровно половина из них болеет за «Спартак», а остальные – за «Динамо». Разрешается спросить у любых двоих, болеют ли они за разные команды, и они честно ответят «да» или «нет». Требуется посадить болельщиков в два автобуса так, чтобы в каждом были болельщики только одной команды. За какое минимальное количество вопросов это наверняка можно сделать?

ИГ2. У бедного мальчика Саши всего 169 монет, причем одна из них фальшивая. У жадного мальчика Кости есть весы, но за каждое взвешивание он берет с Саши плату: 1 рубль, если одна из чашек перевесила, и 2 рубля, если весы остались в равновесии. Какую наименьшую сумму должен приготовить Саша, чтобы заведомо определить фальшивую монету с помощью Костиных весов? (все настоящие монеты весят одинаково, фальшивая легче настоящей).

ИГ3. Задумано натуральное число x от 1 до 144. Можно последовательно задать 10 вопросов вида «Верно ли, что $x > k$ » (где k – любое конкретное число). Однако на любой вопрос, кроме 10-го, ответ дается только после того, как задан следующий вопрос (а на 10-й ответ даётся сразу). Как наверняка узнать задуманное число?

ИГ4. Эксперту предъявлено 100 серебряных слитков весами 1001, 1002, ..., 1100 граммов, промаркированных по-китайски. У него есть точные весы, которые показывают вес груза, при условии, однако, что этот вес не более 2,5 кг. За какое наименьшее число взвешиваний эксперт сможет убедить судей, не понимающих по-китайски, что он знает веса всех слитков?

Московские сборы, 6 апреля 2019 г. 10 класс, гр. *Трубы*. А.Шаповалов. www.ashap.info/Mosbory/2019v/index.html