Двудольные графы

Разминка

Зад1. В прошлом учебном году в Заборске прошли такие мат.олимпиады: городская, областная, и турнир городов. В каждой из них участвовало нечетное число учеников маткласса, причем участник участвовал в нечетном числе олимпиад. Всего в матклассе 20 учеников. Докажите, что кое-кто из них не был ни на одной олимпиаде.

Определения. Граф – *двудольный*, если его вершины можно раскрасить в два цвета так, что не будет ребер с концами одинакового цвета. *Пример*: любое дерево.

Упр2. Рассмотрим графы правильных многогранников. Какие из них – двудольные?

Зад3. Докажите, что следующие графы – двудольные.

а) Вершины графа – расстановка пары фишек на шахматной доске. Две расстановки связаны ребром, если позиции получаются друг из друга ходом фишки на одну клетку по вертикали или горизонтали.

б) Вершины – перестановки из n чисел, ребра – расположения, получающиеся друг из друга перестановкой двух чисел.

в) Тоже, что (а) для n фишек.

Зад4. Несколько равносторонних треугольников на плоскости не перекрываются. Всегда ли можно раскрасить их в два цвета так, чтобы треугольники с общим отрезком границы были разного цвета?

Максимальное число ребер

Упр5. Каково наибольшее число ребер в двудольном графе **а)** с $2n$ вершинами; **б)** с $2n+1$ вершиной?

Зад6. В строке из 11 целых чисел для каждой группы подряд идущих чисел (включая группы из одного числа тоже) подсчитана ее сумма. Каково наибольшее количество нечетных сумм?

Обходы,чередование

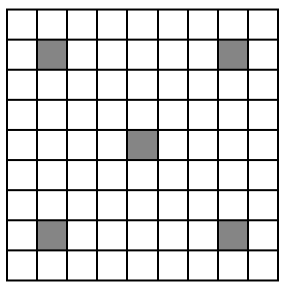
Упр7. Докажите, что в двудольном графе нет нечетных циклов.

Зад8. Отмечены вершины и центры граней куба и проведены диагонали всех граней. Можно ли по отрезкам этих диагоналей обойти все отмеченные точки, побывав в каждой из них ровно по одному разу?

Лемма 9. Пусть Г – двудольный граф с черными и белыми вершинами.

а) Если в Г есть замкнутый цикл, проходящий через каждую вершину ровно по одному разу, то вершин каждого цвета – поровну.

б) Если в Г есть путь, проходящий через каждую вершину ровно по одному разу, то что число белых вершин отличается от числа черных вершин не более чем на 1.



Зад10. Замок разбит на 81 квадратных зала (см. рис). В каждой стенке между залами есть дверь. Пять тёмных залов закрыты для посещения. Какое наибольшее число залов сможет обойти турист, не заходя ни в какой зал дважды?

Нечетные циклы.

Теорема 11. *(критерий двудольного графа)* Граф – двудольный $\Leftrightarrow$ в графе нет нечетных циклов.

Зад12. а) В клетки доски 8×8 записали числа 1,2,...,64 в неизвестном порядке. Разрешается узнать сумму чисел в любой паре клеток с общей стороной. Всегда ли можно узнать расположение всех чисел? **б)** Тот же вопрос для доски 9×9.

Зачётные задачи

ДГ1. Все грани многогранника – многоугольники с четным числом сторон. Докажите, что граф многогранника – двудольный.

ДГ2. 10 кружковцев образовали дежурную команду для решения домашних задач. В команде всегда не менее 3 человек. Каждый вечер в команду добавляется один человек либо из неё исключается один человек. Можно ли будет перебрать все допустимые составы команды ровно по одному разу?

ДГ3. Гриша записал в клетки шахматной доски числа 1,2,...,64 в неизвестном порядке. Он сообщил Леше сумму чисел в каждом прямоугольнике из двух клеток и добавил, что 1 и 64 лежат на одной диагонали. Докажите, что по этой информации Леша может точно определить, где какое число записано.

ДГ4. Вершины замкнутой ломаной – это узлы клетчатой бумаги, а все звенья одинаковой длины. Докажите, что число звеньев чётно.