

Испытания и оценки

Пусть надо выявить один случай из N , и каждый вопрос делит все случаи на k групп, выясняя, в какую из групп попал искомый случай. Тогда жадный алгоритм состоит в том, чтобы делить на такие группы, чтобы размер наибольшей был как можно меньше (в идеале – на равные группы).

1. а) Зритель задумывает одну из 100 карточек. За один ход фокусник может разложить все карточки на 10 кучек и узнать у зрителя, в какой из групп находится карточка. За какое наименьшее число вопросов фокусник может наверняка определить задуманную карту? б) То же, но раскладывает на 5 кучек.
2. а) Петя загадал натуральное число A от 1 до 8. Витя называет любое натуральное число X от 1 до 8, и Петя отвечает “ X делится на моё число” или “ X не делится на моё число”. Может ли Витя наверняка угадать A после трёх таких вопросов? б) То же, но Петя загадал число от 1 до 16, а Витя называет любое натуральное число X от 1 до 32. Может ли Витя наверняка угадать число за 4 таких вопроса?
3. Есть 5 серебряных монет и 4 золотые (они отличаются по виду от серебряных). Известно, что одна из них фальшивая, а остальные настоящие (учтите, что настоящая серебряная монета может отличаться по весу от настоящей золотой!). Если фальшивая монета серебряная, то она легче настоящих монет, а если золотая – то тяжелее. За какое наименьшее число взвешиваний на чашечных весах без гирь можно наверняка найти фальшивую монету?
4. Есть N карт, из которых задумана одна. Разрешается разложить карты на стопки с разным числом карт и спросить, в какой из стопок задуманная карта. При каких N можно найти задуманную карту за два таких вопроса?

Пространство вариантов

Чаще всего перед нами ситуация одного неизвестного варианта из некоторого множества (пространства) возможных элементарных вариантов. В предыдущих задачах варианты совпадали с предметами, но это не обязательно. Полезно выписать все возможные варианты и делать такие испытания, чтобы количество подозрительных вариантов в наихудшем случае было как можно меньше.

5. Задуманы два континента. За какое наименьшее число вопросов типа «Да/Нет» можно наверняка определить оба?
6. Имеются 4 детали с маркировками 1 г, 2 г, 3 г и 4 г. Одна из них дефектная: более лёгкая или более тяжёлая, чем указано. За какое наименьшее число взвешиваний на чашечных весах без гирь можно наверняка узнать, какая из деталей дефектная и при этом определить, легче ли она или тяжелее, чем на ней указано?
7. Было 9 гирь массами 1 г, 2 г, ..., 9 г, причём гиря большей массы имеет больший размер. Одна из гирь потерялась. Как за два взвешивания на чашечных весах без гирь выяснить, какая именно гиря потеряна?
8. Есть 2 серебряных монет и 13 золотых. Известно, что и среди серебряных, и среди золотых есть по одной фальшивой, а остальные настоящие. Фальшивые монеты весят одинаково и легче настоящих, которые тоже все весят одинаково. За какое наименьшее число взвешиваний на чашечных весах без гирь можно наверняка найти обе фальшивые монеты?

Зачётные задачи

Ис1. В кассе купца впервые за год появились деньги – 9 копеек, 9 двушек и 9 пятаков. Стало известно, что одна из них – фальшивая, легче настоящей (а настоящие весят соответственно 1, 2 и 5 г). Работники требуют немедленной выдачи зарплаты, причем настоящими монетами. У кассира есть чашечные весы без гирь. Как только выясняется, что какие-либо монеты – настоящие, они выплачиваются работникам и в дальнейших взвешиваниях не участвуют. Может ли приказчик наверняка выявить фальшивую монету за 3 взвешивания?

Ис2. Ковбой Джо стреляет круглыми пулями диаметром 1 см, и может попасть центром пули в любую выбранную им точку стены. Ему надо накрыть пулей точку на стене, прикрытую газетой $1\text{м} \times 1\text{м}$. После каждого выстрела, начиная со второго, ему сообщают, центр какой из пуль лег ближе к цели: этой или предыдущей. Докажите, что 18-м выстрелом он может накрыть нужную точку.

Ис3. Десять монет лежат в ряд. Среди которых есть как настоящие по 10 г, так и фальшивые по 9 г. Слева лежит одна или несколько настоящих, а потом до конца – фальшивые (возможно, всего одна). За какое наименьшее число взвешиваний на чашечных весах без гирь можно наверняка определить все фальшивые монеты?

Ис4. В королевстве Кривых Весов запрещены чашечные весы, показывающие равновесие при равенстве масс грузов на чашах. Однако для любого $a > 1$ разрешены неравноплечные весы, показывающие равновесие, если вес груза на левой чаше в a раз больше веса на правой. Имея всего одни весы, Толя за два взвешивания может из 8 монет выявить одну фальшивую (более легкую). Чему равно a у Толиных весов? (Известно, что все настоящие монеты весят одинаково).

Ис5. На клетчатой доске 100×100 стоит невидимая ладья. За один вопрос можно указать любой набор клеток и узнать, сколько из них побиты ладьёй. Сколько таких вопросов нужно чтобы наверняка узнать положение ладьи? (Считается, что ладья бьет поле, на котором стоит).