Свяжитесь с графом

Считаем ребра, вершины и компоненты без циклов. Обозначим в графе В – число вершин, Р – число ребер, С – число компонент связности.

Факт 1. а) В дереве (то есть связном графе без циклов) В=Р+1.

б) В графе без циклов В=Р+С

Факт 2. а) В связном графе Р≥В–1. **б)** В любом графе Р≥В–С.

1. В выпуклом многоугольнике проведены все диагонали из одной вершины. Можно ли стороны и проведенные диагонали раскрасить в жёлтый и красный цвета так, чтобы жук мог проползти из любой вершины в любую другую по жёлтым отрезкам, а клоп – по красным?

2. В проволочном каркасе додекаэдра разрешается перекусывать рёбра ровно посредине. Какое *наибольшее* число рёбер можно перекусить так, чтобы каркас развалился не более чем на 5 частей?

Увидеть граф за условием задачи помогают *выделенные* пары объектов, в частности, соседние объекты или клетки с общей границей. Выписывая для таких графов уравнения и неравенства для В, Р, С, можно получать нетривиальные оценки.

3. а) Дворец шаха представляет в квадрат 8х8, разбитый внутренними стенами на квадратные комнаты 1х1. Шах хочет разбить их на 4 связные равные по площади квартиры, снеся как можно меньше внутренних стен длины 1. Сколько стен ему придется снести?

б) То же, но внутри квартир не должно быть стен между соседними комнатами.

4. На клетчатой бумаге нарисован многоугольник площадью в n клеток. Его контур идёт по линиям сетки. Каков наибольший периметр многоугольника? (Сторона клетки равна 1).

Для целей задачи можно картинку преобразовать. Например, убрав часть линий, объединить группу клеток в одну вершину.

5. Из спичек сложена шахматная доска. В каждой клетке сидит по жуку, которые через спичку не ползают. Спички внешнего контура намазаны мёдом. Какое наименьшее число спичек надо убрать, чтобы каждый жук мог доползти до спички с мёдом.

6. В классе 30 человек. За месяц было 29 дежурств, в каждом дежурила пара учеников. Докажите, что можно так выставить всем ученикам класса по одной оценке по 5-балльной шкале, что будет выставлена хотя бы одна пятерка, и в каждой паре дежуривших сумма оценок будет равна 8.

7. Шахматную доску покрасили в 33 цвета. Пара различных цветов называется *хорошей*, если можно поставить пару бьющих друг друга коней на две клетки этих цветов. Каково минимальное число хороших пар цветов?

8. Дан клетчатый прямоугольник $m\times n$. Каждую его клетку разрезали по одной из диагоналей. На какое наименьшее число частей мог распасться прямоугольник?

9. Какое наибольшее число клеток доски 9×9 можно разрезать по обеим диагоналям, чтобы при этом доска не распалась на несколько частей?

Зачётные задачи

СГ1. На клетчатой бумаге по границам клеток обведен тысячеугольник. Из какого наименьшего числа клеток он может состоять?

СГ2. Клетчатый квадрат 8×8 разрезан по границам клеток на 3 многоугольника одинакового периметра. Найдите наибольшее возможное значение периметра, если сторона клетки равна 1.

СГ3. Из кубиков 1×1×1 склеен куб 3×3×3. Какое наибольшее количество кубиков можно из него выкинуть, чтобы осталась связная фигура, чья проекция на каждую из граней исходного куба была квадратом 3×3 ?

СГ4. Фигура на рис. 9 разрезана по сторонам клеток на несколько многоугольников, ни один из которых не содержит квадрата 2×2. Каково наименьшее возможное число многоугольников?

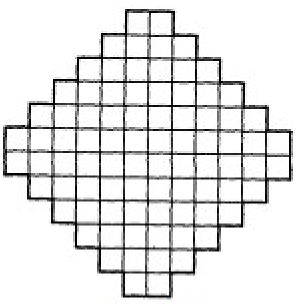

Рис. 9