

Комбинаторная геометрия: оценки площади и периметра

1. Вокруг окружности радиуса r описан многоугольник периметра p . Найдите площадь многоугольника.
2. Квадрат со стороной 1 разрезан на прямоугольники. В каждом прямоугольнике выбрали одну из двух меньших сторон (если прямоугольник – квадрат, то выбрали любую из четырёх сторон). Докажите, что сумма всех выбранных сторон не меньше 1.
3. Из треугольника площади 1 вырезали круг радиуса 0,2. Докажите, что периметр треугольника ≤ 10 .
4. Многоугольник вырезали из круга радиуса 1. Каково наибольшее отношение его площади к числу сторон?
5. На плоскости, разграфленной сеткой вертикальных и горизонтальных прямых на квадратные клетки, нарисован выпуклый многоугольник M так, что все его вершины находятся в вершинах клеток и ни одна из его сторон не вертикальна и не горизонтальна. Докажите, что сумма длин вертикальных отрезков сетки внутри M равна сумме длин горизонтальных отрезков сетки внутри M .
6. Докажите, что любой жесткий плоский треугольник T площади меньше 4 можно просунуть сквозь треугольную дырку Q площади 3.
7. Докажите, что из любого треугольника площади 4 можно вырезать осесимметричную фигуру площади больше 3.
8. Несколько черных квадратов со стороной 1 дм прибиты к белой плоскости одним гвоздем, не задевающим границ квадратов. Образовалась многоугольная черная фигура.
 - а) Оцените сверху площадь фигуры.
 - б) Толщина гвоздя 1 мм. Оцените сверху периметр фигуры.
 - в) Толщина гвоздя 0. Оцените сверху периметр фигуры.
 - г) Несколько черных квадратов со стороной 1 лежат на белой плоскости, образуя многоугольную черную фигуру (возможно, состоящую из нескольких кусков и имеющую дырки). Может ли отношение периметра этой фигуры к ее площади быть больше 10000 ?

Зачётные задачи

- ОП1.** Докажите, что многоугольник периметра P можно накрыть каким-нибудь прямоугольником периметра $2P$.
- ОП2.** Даны выпуклый многоугольник и квадрат. Известно, что как ни расположи две копии многоугольника внутри квадрата, найдётся точка, принадлежащая обеим копиям. Докажите, что как ни расположи три копии многоугольника внутри квадрата, найдётся точка, принадлежащая всем трём копиям.
- ОП3.** Дан жесткий проволочный контур квадрата площади 1 дм². Его разрезали на части и спаяли заново. Получился контур плоского многоугольника.
 - а) Резали на 3 части. Какова наибольшая возможная площадь нового многоугольника?
 - б) Резали на 4 части. Могла ли получиться площадь не менее 105 см²?
- ОП4.** Верно ли, что любой треугольник площади 3 можно покрыть выпуклым осесимметричным многоугольником площади 5?

Московские сборы, 6 апреля 2019 г, 10 класс, гр. Провода. А.Шаповалов, www.ashap.info/Mosbory/2019v/index.html