Конструкции с подсчетами и доводкой

Понять, как такое могло быть, помогают подсчеты. Результаты можно и нужно использовать при построении.

1. а) Существует ли натуральное число n такое, что у n и n+2009 одинаковая сумма цифр?
б) Тот же вопрос про n и n+333?
в) Докажите, что не менее 80% пятизначных чисел при увеличении на 9 не меняют сумму цифр.
2. Существует ли 100-значное составное число, которое при одной замене любой цифры на любую другую останется составным.
3. Барон Мюнхгаузен говорит, что у него есть многозначное число-палиндром (оно читается одинаково слева направо и справа налево). Написав его на бумажной ленте, барон сделал несколько разрезов между цифрами. Лента распалась на N кусков. Переложив куски в другом порядке, барон увидел, что на кусках по разу записаны числа 1, 2, ..., N. Могут ли слова барона быть правдой?

Сначала строим неполноценную конструкцию, а потом её подправляем

4. Может ли в таблице 3x3 суммы в 7 трехклеточных рядах (по горизонтали, вертикали и диагонали) быть одинаковы, а восьмая такая сумма от них отличаться?
5. Найдутся ли 6 различных дробей вида n/(n+1) таких, чтобы сумма первых трёх была равна сумме трёх остальных?
6. а) Можно ли клетчатую доску 99x99 раскрасить в два цвета так, чтобы каждая клетка граничила по стороне ровно с двумя клетками другого цвета?
б) Можно ли клетчатую доску 100x100 раскрасить в два цвета так, чтобы каждая клетка граничила по стороне ровно с двумя клетками другого цвета?

Модифицируй знакомое

7. Существуют ли две такие всюду определенные непостоянные функции $f(x)$ и $g(x)$, что $f(g(x))$ – чётна, а $g(f(x))$ – нечётна?
8. Можно ли числа от 1, 2, …, 100 расставить в другом порядке так, чтобы среднее арифметическое любой группы из двух или более подряд стоящих чисел не было целым?
9. В бесконечной возрастающей геометрической прогрессии все члены положительны. Каждое число заменили на его дробную часть. Могла ли получиться бесконечная убывающая геометрическая прогрессия?

Зачётные задачи

КП1. В прямоугольной таблице клетки нумеруются по порядку: сначала первая строка слева направо, затем вторая строка слева направо и т. д. Барон Мюнхгаузен готов для каждого n предъявить такую таблицу, разрезанную на n многоугольных частей с равными суммами номеров в каждой части. Могут ли слова барона быть правдой?
КП2. 100 гирек веса 1, 2, …, 100 г разложили на две чаши весов так, что есть равновесие. Докажите, что можно убрать по две гирьки с каждой чаши так, что равновесие не нарушится.
КП3. Через $S(n)$ обозначим сумму цифр числа n (в десятичной записи). Существуют ли три таких различных натуральных числа p, q и r, что $p+S(p)=q+S(q)=r+S(r)$?
КП4. Существует ли таблица 4×4, заполненная различными натуральными числами так, чтобы произведения в столбцах были равны, и суммы в строках тоже были равны (но суммы могут отличаться от произведений)?