

Бесконечные алгоритмы

Рабочий несет домой со стройки один кирпич. – Что ж всего один-то? – удивляется охранник. – А я не ленивый, еще не раз схожу...

Алгоритм может последовательно проверять по одной бесконечную цепочку гипотез, пока одна из них не окажется верной.

1. Состав из конечного числа одинаковых вагонов замкнут в кольцо. Тебя с куском мела поместили в один из вагонов. Ты можешь свободно ходить по составу и делать любые пометки на стенах вагонов. В какой-то момент ты должен сказать, сколько вагонов в поезде. Однако попытка у тебя всего одна. Если угадаешь, то тебя выпустят (а иначе – конец). Учти, однако, что до тебя уже многие пытались пройти это испытание. Возможно, они оставляли на стенах какие-то пометки. Опиши алгоритм, который поможет спастись *наверняка*.

Бесконечный объект часто строят индуктивно, последовательно наращивая конечный объект. Обычно есть бесконечно много вариантов наращивания, а число запретов конечно в каждый момент.

2. В таблице 10 строк и бесконечно много столбцов. В каждой строке и каждом столбце все числа различны. Докажите, что можно выбрать бесконечно много столбцов так, чтобы все числа в выбранных столбцах были различны.

*Индуктивное построение может вестись группами, когда один из объектов группы – **обязательный** (например, минимальный из непостроенных), а остальные – вспомогательные.*

3. Влад построил последовательность из 2019 различных натуральных чисел, где для любого $k \leq 2019$ сумма первых k чисел делилась на k . Докажите, что последовательность можно продолжить до бесконечности с сохранением условия о делимости и так, чтобы каждое натуральное число встретилось ровно один раз.

Определение. Множество A *считно*, если его элементы можно занумеровать натуральными числами.

4. Счетны ли множества:

- а) целых чисел; б) клеток бесконечной во все стороны шахматной доски;
- в) рациональных чисел; г) конечных множеств натуральных чисел?

Индуктивное построение можно проводить с любым счетным множеством: достаточно только его пронумеровать.

5. Бесконечная вправо и влево последовательность целых чисел называется биекцией, если в ней каждое целое число встречается ровно по одному разу. Докажите, что любую биекцию можно представить как сумму двух других биекций (последовательности складываются по координатам).

Диагональный метод Кантора: на каждом шаге обеспечиваем отличие от объекта с очередным номером.

6. Дано счетное множество различных двоичных последовательностей. Докажите, что можно написать двоичную последовательность, не входящую в это множество.
7. Два бога по очереди выписывают цифры бесконечной десятичной дроби. Первый своим ходом приписывает в хвост любое конечное число цифр, второй – одну. Они успевают сделать все ходы (то есть, бесконечно много) за час. Если в итоге получится периодическая дробь (без предпериода), выигрывает первый, иначе – второй. Кто из них может выиграть, как бы ни играл соперник?
8. Пусть дана бесконечная шахматная доска, в каждой клетке которой стоит натуральное число (числа могут повторяться). Идя королем по доске (возможно, с повторением клеток), и выписывая по порядку числа, мы получаем *королевскую последовательность*. Докажите, что для любой данной доски есть *некоролевская последовательность*.

Счетное множество разбивается на счетное число конечных множеств. В частности, счетное число отдельных «плохих» ходов можно заменить на счетное число «хороших» групп ходов.

9. В целых точках прямой расположены ямы, шириной 0,01 каждая. Длина прыжков блохи постоянна и равна $\sqrt{2}$. Докажите, что блоха рано или поздно попадет в яму.

Зачётные задачи

БА1. Дан отрезок числовой оси. Два бога ходят по очереди. Каждым ходом от отрезка отрезается и отбрасывается правая или левая половинка. Когда игра закончится, остается общая точка всех отрезков. Если она рациональна, выигрывает первый, иначе – второй. У кого из них есть выигрышная стратегия?

БА2. Петя и Вася играют на бесконечной во все стороны клетчатой доске, вначале пустой. Ходят по очереди, начинает Петя. За ход Петя ставит два крестика в любые две пустые клетки. Вася за один ход выбирает *один* клетчатый многоугольник, где все клетки заполнены крестиками, и стирает в нем все крестики. Может ли Петя получить квадрат 2019×2019 , весь заполненный крестиками?

БА3. Назовем *лабиринтом* шахматную доску 8×8 , где между некоторыми полями вставлены перегородки. По команде ВПРАВО ладья смещается на одно поле вправо или, если справа край доски или перегородка, остается на месте; аналогично выполняются команды ВЛЕВО, ВВЕРХ и ВНИЗ. Бог пишет программу – конечную последовательность указанных команд, и дает её чёрту, после чего чёрт выбирает лабиринт и помещает в него ладью на любое поле. Докажите, что бог может написать такую программу, что ладья обойдет все доступные поля в лабиринте при любом выборе чёрта.

БА4. Последовательность задана рекуррентной формулой $x_{n+1} = [x_n] \{x_n\}$. Докажите, что последовательность периодична.

Московские сборы, 4 апреля 2019 г., 10 класс, гр. Провода. А. Шаповалов, www.ashap.info/Mosbory/2019v/index.html