

## Непрерывная комбинаторика: порядок и оценки

В некоторых задачах возникают комбинации из *конечного* числа объектов нецелого веса. Важным приемом является упорядочение объектов.

1. Есть несколько камней, выложенных в порядке возрастания весов. За какое наименьшее число взвешиваний на чашечных весах без гирь можно проверить или опровергнуть утверждение: Любые два камня вместе тяжелее одного?

2. Есть  $N$  упорядоченных по весу рубинов, и  $N$  упорядоченных по весу алмазов. Известно, что веса всех  $2N$  камней различны. За одну проверку можно разбить все камни на  $N$  пар (рубин алмаз) и для каждой пары узнать (на чашечных весах без гирь), какой из двух камней в ней тяжелее. Требуется найти разбиение на такие пары, в котором ровно в половине пар рубин тяжелее алмаза, или доказать, что такое разбиение невозможно. Каким наименьшим числом проверок можно обойтись?

Решите задачу **а)** для  $N=2$ ; **б)** для  $N=4$ ; **в)** для  $N=10$ .

3. **а)** Имеются 300 яблок, любые два из которых различаются по весу не более, чем в два раза. Докажите, что их можно разложить в пакеты по два яблока так, чтобы любые два пакета различались по весу не более, чем в полтора раза.

**б)** Имеются 300 яблок, любые два из которых различаются по весу не более, чем в три раза. Докажите, что их можно разложить в пакеты по четыре яблока так, чтобы любые два пакета различались по весу не более, чем в полтора раза.

4. Есть 1000 яблок, которые надо разложить в 10 пакетов по 100 яблок в каждом. Оказалось, что при любой такой раскладке найдутся хотя бы два пакета одинакового веса.

Докажите, что

**а)** есть по крайней мере 200 яблок одинакового веса;

**б)** есть раскладка, когда по крайней мере 5 пакетов весят одинаково.

### Разбиения с небольшой разницей

5. **Лемма о цене игры.** На столе лежат несколько кусков шоколада, самый большой весит  $b$ . Петя начинает, и они с Васей по очереди съедают по куску, пока не съедят всё. Докажите, что при наилучших действиях Васи Петя сможет съесть **а)** не меньше Васи; **б)** не более, чем на  $b$  больше Васи.

6. **Лемма о способах выбора.** Есть  $2n$  кусков сыра. Докажите, что можно не менее чем  $2^n$  способами разложить их по  $n$  штук на две чаши весов так, чтобы разность весов чаш была не больше веса самого тяжелого куска.

7. В 31 ящике лежит смесь апельсинов и бананов. Докажите, что можно так выбрать

**а)** 16 ящиков, что в них окажется по весу не менее половины всех апельсинов и не менее половины всех бананов;

**б)** 11 ящиков, что в них окажется по весу не менее трети всех апельсинов и не менее трети всех бананов.

### Зачетные задачи

**КО1.** Есть 20 фруктов. Назовем натуральное число  $k < 20$  хорошим, если найдется  $k$  фруктов, чей вес равен ровно половине общего веса. Каково наибольшее возможное количество хороших чисел?

**КО2.** Есть 1000 яблок, которые надо разложить в 10 пакетов по 100 яблок в каждом. Оказалось, что при любой такой раскладке найдутся хотя бы два пакета одинакового веса. Докажите, что найдутся по крайней мере 900 яблок одинакового веса.

**КО3.** Есть 100 слив с косточками. Веса любых двух слив отличаются не более, чем вдвое, и веса любых двух косточек тоже отличаются не более, чем вдвое. Общий вес косточек втрое меньше общего веса слив. Докажите, что сливы можно разделить на две кучки по 50 штук так, чтобы в каждой кучке доля косточек была меньше 40%.

Московские сборы, 9 класс, Ласточки, [www.ashap.info/Uroki/Mosbory/2018o](http://www.ashap.info/Uroki/Mosbory/2018o) А.Шаповалов. 16 ноября 2018 г.