

Непрерывная комбинаторика: порядок и оценки

В некоторых задачах возникают комбинации из *конечного* числа объектов нецелого веса. Важным приемом является упорядочение объектов.

1. Есть несколько камней, выложенных в порядке возрастания весов. За какое наименьшее число взвешиваний на чашечных весах без гирь можно проверить или опровергнуть утверждение: Любые два камня вместе тяжелее одного?

2. Сборные Перу и Чили (по N игроков в каждой) намерены сыграть серию матчей по борьбе, где более сильный игрок всегда побеждает более слабого. Для каждого матча организуется 10 пар: перуанец против чилийца, в каждой паре побеждает один из соперников, счет в матче – по числу побед. Организаторам известны сравнительные силы игроков внутри каждой из команд, но не между игроками из разных стран. Они собирается устраивать матчи до тех пор, пока какой-нибудь матч не закончится вничью (или пока не выяснится, что ничейный матч невозможен). Каким наименьшим числом матчей они всегда могут обойтись? Решите задачу **а)** для $N=2$; **б)** для $N=4$; **в)** для $N=10$.

3. **а)** Имеются 300 яблок, любые два из которых различаются по весу не более, чем в два раза. Докажите, что их можно разложить в пакеты по два яблока так, чтобы любые два пакета различались по весу не более, чем в полтора раза.

б) Имеются 300 яблок, любые два из которых различаются по весу не более, чем в три раза. Докажите, что их можно разложить в пакеты по четыре яблока так, чтобы любые два пакета различались по весу не более, чем в полтора раза.

4. Есть 1000 яблок, которые надо разложить в 10 пакетов по 100 яблок в каждом. Оказалось, что при любой такой раскладке найдутся хотя бы два пакета одинакового веса.

Докажите, что

а) есть по крайней мере 200 яблок одинакового веса;

б) есть раскладка, когда по крайней мере 3 пакета весят одинаково.

Разбиения с небольшой разницей

5. **Лемма о цене игры.** На столе лежат несколько кусков шоколада, самый большой весит b . Петя начинает, и они с Васей по очереди съедают по куску, пока не съедят всё. Докажите, что при наилучших действиях Васи Петя сможет съесть **а)** не меньше Васи; **б)** не более, чем на b больше Васи.

6. **Лемма о способах выбора.** Есть $2n$ кусков сыра. Докажите, что можно не менее чем 2^n способами разложить их по n штук на две чаши весов так, чтобы разность весов чаш была не больше веса самого тяжелого куска.

7. В 31 ящике лежит смесь апельсинов и бананов. Докажите, что можно так выбрать 16 ящиков, что в них окажется по весу не менее половины всех апельсинов и не менее половины всех бананов.

Зачетные задачи

КО1. В 31 ящике лежит смесь апельсинов и бананов. Докажите, что можно так выбрать 11 ящиков, что в них окажется по весу не менее трети всех апельсинов и не менее трети всех бананов.

КО2. Есть 20 фруктов. Назовем натуральное число $k < 20$ хорошим, если найдется k фруктов, чей вес равен ровно половине общего веса. Каково наибольшее возможное количество хороших чисел?

КО3. Есть 1000 яблок, которые надо разложить в 10 пакетов по 100 яблок в каждом. Оказалось, что при любой такой раскладке найдутся хотя бы два пакета одинакового веса. Докажите, есть раскладка, когда по крайней мере 8 пакетов весят одинаково.

Московские сборы, 9 класс, Стрижи, www.ashap.info/Uroki/Mosbory/2018o А.Шаповалов. 16 ноября 2018 г.