Непрерывная комбинаторика: точки на отрезке и окружности

В некоторых задачах возникают комбинации из *конечного* числа объектов, но сами объекты выбираются из *бесконечного* набора, заданного *непрерывным параметром* или параметрами. Хорошей моделью в таких задачах служат наборы точек на прямой и окружности, работает обобщенный принцип Дирихле.
Хорошей моделью в таких задачах служат наборы точек на прямой и окружности.

1. Хозяйка испекла для гостей пирог.
а) За столом может оказаться либо p человек, либо q. Как заранее разрезать пирог не более чем на $p+q-1$ кусков (не обязательно равных), чтобы в любом случае его можно было раздать поровну?
б) За столом может оказаться либо 4 человека, либо 6. На какое минимальное количество кусков нужно заранее разрезать пирог, чтобы в любом случае его можно было раздать поровну?
в) А если либо 9, либо 15 гостей?

2. Есть 11 гирь, каждая весит меньше 100 г.
а) Выписаны по разу веса всевозможных пар из этих гирь. Докажите, что какие-то два веса отличаются менее чем на 4 г.
б) Известно, что каждая гиря отличается по весу более чем на 4 г от любой другой гири. Докажите, что можно выбрать 4 гири и разложить их на две пары так, чтобы веса пар отличались меньше, чем на 4 г.

3. а. (Лемма о кратной подсумме) В ряд выписали n целых чисел. Докажите, что в это ряду можно подчеркнуть одно или несколько подряд идущих чисел так, чтобы их сумма делилась на n.
б) В ряд выписаны действительные числа $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_{1000}$. Докажите, что можно выделить одно или несколько стоящих рядом чисел так, что их сумма будет отличаться от целого числа меньше, чем на 0,001.

С группами точек можно поступать как с одним целым: переворачивать, сдвигать, сжимать или растягивать. Удачно выбранная операция помогает решить задачу.

4. а) Известно, что число a положительно, а неравенство $1 < xa < 2$ имеет ровно 3 решения в целых числах. Сколько решений в целых числах может иметь неравенство $2 < xa < 3$?
б) Известно, что число a положительно, а неравенство $10 < a^x < 100$ имеет ровно 5 решений в натуральных числах. Сколько таких решений может иметь неравенство $100 < a^x < 1000$?

Полезно помнить, что на любом, сколь угодно малом интервале найдется рациональное число.

5. Даны 100 различных чисел. Докажите, что можно умножить все числа на одно и то же рациональное число так, чтобы ровно половина из них стала больше 1000.

6. а) Даны 3 пары положительных чисел: $a_1<b_1$, $a_2<b_2$, $a_3<b_3$. Числа в каждой паре разрешается увеличить в целое число раз, для каждой пары в своё. Докажите, что можно добиться, чтобы все a_i стали меньше всех b_j.
б) Есть сто картинок, на каждой – взрослый и ребенок ростом поменьше (все двести человек на картинках разные). Из них надо собрать одну большую картину. При этом разрешается уменьшать видимый рост людей в целое число раз: эти целые числа могут быть разными для людей с разных картинок и должны быть одинаковыми для людей с одной картинки. Докажите, что можно добиться, чтобы на большой картине каждый взрослый имел рост больше каждого ребенка.

Среди всевозможных отрезков короче данного нет самого длинного: для каждого найдется еще длиннее. Для любой точки на интервале есть точка, более близкая к его концу.

7. Двое по очереди отмечают точки на окружности: первый — красным цветом, второй – синим. Когда отмечено по 2 точки каждого цвета, игра заканчивается. Затем каждый игрок находит на окружности дугу наибольшей длины с концами своего цвета, на которой больше нет отмеченных точек. У кого длина дуги больше — тот выиграл (в случае равенства длин дуг, а также при отсутствии таких дуг у обоих игроков — ничья). Кто из играющих может всегда выигрывать, как бы ни играл соперник?

Зачетные задачи

Точ1. У Пети было 20 камней нецелого веса, выложенных по кругу. Для каждого камня Петя сделал взвешивание, положив этот камень на одну чашу весов, а пару его соседей – на другую чашу, и записал результат: тяжелее этот камень или легче (равенства ни разу не случилось). Докажите, что Вася может подменить все камни на камни целого веса так, чтобы такая же проверка дала точно те же результаты.

Точ2. а) Есть 10 яблок весом от 50 до 100 г. Докажите, что из них можно можно выбрать два непересекающихся набора, чьи веса отличаются менее чем на 1 г.
б) То же, но в наборах должно быть одинаковое число яблок.

Точ3. Купившему головку сыра весом 3 кг магазин предлагает призовую игру. Покупатель режет головку на 4 куска, а продавец выбирает из этих кусков один или несколько и раскладывает их на одну или на обе чаши весов. При неравновесии продавец обязан за счет магазина добавить призовой кусок сыра, уравновешивающий чаши. Продавец старается сделать приз поменьше, а покупатель – побольше. Найдите вес призового куска при наилучших действиях сторон.

Точ4. Задача 7 когда каждый отмечает по $N>2$ точек.