

ЗАПУСТИ ПРОЦЕСС

Запустив процесс, можно «по цепочке» распространить свойство.

1. В последовательности чисел каждый член (кроме первого) на 18 больше суммы двух своих соседей. 20-й член равен 20,18. Докажите, что в последовательности никакие два соседних члена не являются оба целыми числами.

Получить искомую конструкцию можно методом последовательных улучшений. Например, увеличивая на каждом шаге число деталей, поставленных на место.

2. а) Есть несколько кусков сыра, каждый – не тяжелее 100 г. Докажите, что их все можно разложить на две кучки так, чтобы веса кучек отличались не более чем на 100 г.

б) Есть 20 камней неизвестного веса и двухчашечные весы без гирь. Докажите, что сделав не более 19 взвешиваний, можно все камни можно разложить на две кучки так, чтобы веса кучек отличались не более чем на вес самого тяжелого камня.

Запускаясь, надо понимать, какие промежуточные ситуации получаются в процессе, и как делать очередной шаг в разных ситуациях.

3. Ученики школы посещают кружки. Докажите, что можно несколько школьников принять в пионеры так, чтобы в каждом кружке был хотя бы один пионер и для любого пионера нашелся кружок, в котором он был бы единственным пионером.

4. Среди 50 школьников каждый знаком не менее чем с 25 другими. Докажите, что можно их разбить на группы из 2 или 3 человек так, чтобы каждый был знаком со всеми в своей группе.

При сборке детали не обязательно добавлять по одной. Можно соединять и куски из нескольких деталей, уменьшая общее число кусков.

5. На кольцевой дороге стоят несколько одинаковых автомобилей. Известно, что общего количества бензина в них достаточно на полный круг по кольцу. Докажите, что найдется автомобиль, который сможет проехать полный круг, забирая бензин у других автомобилей по мере проезда мимо них.

Делая очередной шаг, думайте не только о конечной цели, но и о возможности для следующего шага.

6. Есть 100 конфет 5 сортов, каждого сорта не более 50 штук. Докажите, что конфеты можно разбить на 50 пар так, чтобы в каждой паре конфеты были разного сорта.

7. На окружности отмечено 300 точек: по 100 точек синего, красного и зелёного цветов. Докажите, что можно провести 150 отрезков с концами в этих точках, соблюдая такие правила: 1) никакие два отрезка не пересекаются (даже в концах); 2) концы каждого отрезка – разного цвета.

Свяжите с конструкцией величину, меняющийся в одну сторону при улучшениях (*полуинвариант*). Если полуинвариант нельзя менять бесконечно, то его крайнее значение даст искомый результат (*принцип крайнего*), или докажет, что исходная конструкция невозможна (*бесконечный спуск*).

8. На олимпиаде у каждого участника не более 25 знакомых. Докажите, что можно рассадить всех участников по трём аудиториям так, чтобы у каждого в его аудитории было не более 8 знакомых.

9*. На координатной плоскости лежит правильный пятиугольник. Докажите, что хотя бы у одной из его вершин есть не целая координата.

Зачетные задачи

ЗП1. На клетках доски 10×10 лежит по алмазу так, что на соседних по стороне клетках веса различны. Докажите, что алмазы можно переложить на клетки доски 2×50 так, чтобы по-прежнему веса на соседних клетках были различны.

ЗП2. На окружности расставлено несколько положительных чисел, каждое из которых не больше 1. Докажите, что можно разделить окружность на три дуги так, что суммы чисел на соседних дугах будут отличаться не больше чем на 1. (Если на дуге нет чисел, то сумма на ней считается равной нулю.)

ЗП3. Натуральное число кратно 4. Все его делители выписали в строку в порядке возрастания. Докажите, что в этой строке найдется пара соседей с разностью 2.

ЗП4. Шайка разбойников отобрала у купца мешок монет. Каждая монета стоит целое число грошей. Оказалось, что какую бы монету ни отложить, оставшуюся сумму можно разделить между разбойниками поровну.

Докажите, что если отложить одну монету, то число монет разделится на число разбойников.