Целые и нецелые

0. У аптекаря есть три гирьки, с помощью которых он одному покупателю отвесил 100 г йода, другому – 101 г мёда, а третьему – 102 г перекиси водорода. (Гирьки он ставил только на одну чашку весов.) Могла ли каждая гирька быть легче 90 г?
1. Есть 10 карточек, на каждой по числу. Для каждого из набора карточек вычислили его сумму. Не все суммы – целые. Какое наибольшее количество сумм может быть целыми?

Определение. Назовем *округлением* замену нецелого числа на одно из двух ближайших целых (с недостатком или с избытком), а целое пусть при округлении не меняется. Например, 3,14 можно округлить до 3 или до 4.

2. а) Записано верное равенство: 100 слагаемых и их сумма. Докажите, что все нецелые числа можно округлить до целого так, чтобы равенство осталось верным.
б) В вершинах куба выписаны числа, а на каждом ребре – сумма чисел в его концах. Докажите, что можно все 20 чисел округлить так, чтобы по-прежнему на каждом ребре стояла сумма чисел в его концах.
в) В вершинах пятиугольной призмы выписаны числа, а на каждом ребре – сумма чисел в его концах. Всегда ли можно все 25 чисел округлить так, чтобы по-прежнему на каждом ребре стояла сумма чисел в его концах?
3. В 10 кошельках лежали монеты так, что веса любых двух монет из одного кошелька отличались не более, чем на 1 г (веса монет могут быть нецелыми). Монеты смешали и положили в непрозрачный мешок. Саша про веса монет заранее ничего не знает. Он вынимает одну монету из мешка, взвешивает, затем кладет монету в одну из имеющихся 20 коробок, вынимает следующую монету и т.д. (Положив монету в коробку, потом её уже нельзя переложить). Докажите, что Саша может действовать так, чтобы в каждой коробке веса любых двух монет отличались не более чем на 1 г.
4. Даны 9 чисел $a_1, a_2, \ldots, a_9$. Известно, что не все числа $2a_1, 2a_2, \ldots, 2a_9$ – целые. Какое наибольшее число целых может быть среди попарных сумм a_i+a_j $(i\neq j)$?
5. Надо сделать набор из пяти гирь, с помощью которых можно уравновесить любой *целый* вес от 5 до 10 г (гири кладутся на одну чашку весов, измеряемый вес – на другую, веса гирь не обязательно целые). Одна гиря делается из золота, каждая из остальных не тяжелее золотой. Каким наименьшим количеством золота можно обойтись?
6. Шесть команд в однокруговом турнире набрали 10, 7, 6, 6, 3 и 3 очка. Сколько очков начислялось за победу, если за ничью давали 1 очко, а за поражение 0?
7. а) В клетки прямоугольной таблицы вписаны числа. Выписаны также суммы для каждой строки, для каждого столбца и для всей таблицы. Все эти суммы оказались целыми. Докажите, что все числа в таблице можно округлить так, чтобы все суммы по-прежнему сходились.
б) То же, но суммы могут быть не целыми. Докажите, что можно округлить числа в таблице и суммы так, чтобы всё сходилось.

Зачетные задачи

ЦН1. Вес каждой гирьки набора – нецелое число грамм. Ими можно уравновесить любой целый вес от 1 г до 40 г (гири кладутся на одну чашку весов, измеряемый вес – на другую). Каково наименьшее число гирь в таком наборе?
ЦН2. Алёна и Боря независимо друг от друга складывают одни и те же *n* чисел в одном порядке. На каждом шаге (написав первое число, прибавив второе и т.д.) они делают следующее. Если дробная часть полученной суммы меньше 0,5, то Алёна округляет до ближайшего меньшего целого, а Боря не округляет. Если же дробная часть больше или равна 0,5, то Боря округляет до ближайшего большего целого, а Алёна не округляет. Какова наибольшая возможная разность между результатами Бори и Алёны?
ЦН5. Имеется набор из 20 гирь, с помощью которых можно взвесить любой целый вес от 1 до 1997 г (гири кладутся на одну чашку весов, измеряемый вес – на другую). Каков минимально возможный вес самой тяжелой гири такого набора?
ЦН6. а) Из колоды отложили часть карт. Докажите, что оставшиеся можно разделить между двумя игроками так, чтобы у них общее число карт, число карт каждой масти и число карт каждого достоинства отличалось не более, чем на 1.
б) То же, но карты делятся между тремя игроками.