Целые и нецелые

1. У аптекаря есть три гирьки, с помощью которых он одному покупателю отвесил 100 г йода, другому – 101 г мёда, а третьему – 102 г перекиси водорода. (Гирьки он ставил только на одну чашку весов.) Могла ли каждая гирька быть легче 90 г?
2. Есть 4 карточки, на каждой по числу. Для каждого из 15 наборов карточек вычислили его сумму. Не все суммы – целые. Какое наибольшее количество сумм может быть целыми?
б) То же для 10 карточек.

Определение. Назовем *округлением* замену нецелого числа на одно из двух ближайших целых (с недостатком или с избытком), а целое пусть при округлении не меняется. Например, 3,14 можно округлить до 3 или до 4.

3. а) Записано верное равенство: 100 слагаемых и их сумма. Докажите, что все нецелые числа можно округлить до целого так, чтобы равенство осталось верным.
б) В вершинах куба выписаны числа, а на каждом ребре – сумма чисел в его концах. Докажите, что можно все 20 чисел округлить так, чтобы по-прежнему на каждом ребре стояла сумма чисел в его концах.
в) В вершинах пятиугольной призмы выписаны числа, а на каждом ребре – сумма чисел в его концах. Всегда ли можно все 25 чисел округлить так, чтобы по-прежнему на каждом ребре стояла сумма чисел в его концах?
4. В 10 кошельках лежали монеты так, что веса любых двух монет из одного кошелька отличались не более, чем на 1 г (веса монет могут быть нецелыми). Монеты смешали и положили в непрозрачный мешок. Саша про веса монет заранее ничего не знает. Он вынимает одну монету из мешка, взвешивает, затем кладет монету в одну из имеющихся 20 коробок, вынимает следующую монету и т.д. (Положив монету в коробку, потом её уже нельзя переложить). Докажите, что Саша может действовать так, чтобы в каждой коробке веса любых двух монет отличались не более чем на 1 г.
5. Надо сделать набор из пяти гирь, с помощью которых можно уравновесить любой *целый* вес от 1 до 10 г (гири кладутся на одну чашку весов, измеряемый вес – на другую, веса гирь не обязательно целые). Одна гиря делается из золота, каждая из остальных не тяжелее золотой. Каким наименьшим количеством золота можно обойтись?
6. Шесть команд в однокруговом турнире набрали 10, 7, 6, 6, 3 и 3 очка. Сколько очков начислялось за победу, если за ничью давали 1 очко, а за поражение 0?
7. В клетки прямоугольной таблицы вписаны числа. Выписаны также суммы для каждой строки, для каждого столбца и для всей таблицы. Все эти суммы оказались целыми. Докажите, что все числа в таблице можно округлить так, чтобы все суммы по-прежнему сходились.

Зачетные задачи

ЦН1. Вес каждой гирьки набора – нецелое число грамм. Ими можно уравновесить любой целый вес от 1 г до 40 г (гири кладутся на одну чашку весов, измеряемый вес – на другую). Каково наименьшее число гирь в таком наборе?
ЦН2. Алёна и Боря независимо друг от друга складывают одни и те же n чисел в одном порядке. На каждом шаге (написав первое число, прибавив второе и т.д.) они делают следующее. Если дробная часть полученной суммы меньше 0,5, то Алёна округляет до ближайшего меньшего целого, а Боря не округляет. Если же дробная часть больше или равна 0,5, то Боря округляет до ближайшего большего целого, а Алёна не округляет. Какова наибольшая возможная разность между результатами Бори и Алёны?
ЦН3. Банкомат обменивает монеты: дублоны на пиастры и наоборот. Пиастр стоит s дублонов, а дублон – $^1/_s$ пиастров, где s – не обязательно целое. В банкомат можно вбросить любое число монет одного вида, после чего он выдаст в обмен монеты другого вида, округляя результат до ближайшего целого числа (если ближайших чисел два, выбирается большее). Пират Петер поменял все свои дублоны на пиастры, затем эти пиастры – на дублоны. В результате у него стало больше дублонов. Тогда он повторил операцию «дублоны-пиастры-дублоны», снова меняя все деньги. Могло ли у него стать ещё больше дублонов?
ЦН5. Имеется набор из 20 гирь, с помощью которых можно взвесить любой целый вес от 1 до 1997 г (гири кладутся на одну чашку весов, измеряемый вес – на другую). Каков минимально возможный вес самой тяжелой гири такого набора?