# *Непрерывная комбинаторика: комбинации и оценки*

В некоторых задачах возникают комбинации из *конечного* числа объектов нецелого веса. Важным приемом является упорядочение объектов.

**1.** Есть несколько камней, выложенных в порядке возрастания весов. За какое наименьшее число взвешиваний на чашечных весах без гирь можно проверить или опровергнуть утверждение: Любые два камня вместе тяжелее одного?

**2.** Сборные Перу и Чили (по N игроков в каждой) намерены сыграть серию матчей по борьбе, где более сильный игрок всегда побеждает более слабого. Для каждого матча организуется N пар: перуанец против чилийца, в каждой паре побеждает один из соперников, счет в матче – по числу побед. Организаторам известны сравнительные силы игроков внутри каждой из команд, но не между игроками из разных стран. Они собирается устраивать матчи до тех пор, пока какой-нибудь матч не закончится вничью (или пока не выяснится, что ничейный матч невозможен). Каким наименьшим числом матчей они всегда могут обойтись? Решите задачу **а)** для N=2; **б)** для N=4; в) для N=10.

**3. а)** Имеются 300 яблок, любые два из которых различаются по весу не более, чем в два раза. Докажите, что их можно разложить в пакеты по два яблока так, чтобы любые два пакета различались по весу не более, чем в полтора раза.

**б)** Имеются 300 яблок, любые два из которых различаются по весу не более, чем в три раза. Докажите, что их можно разложить в пакеты по четыре яблока так, чтобы любые два пакета различались по весу не более, чем в полтора раза.

**4.** Есть 1000 яблок, которые надо разложить в 10 пакетов по 100 яблок в каждом. Оказалось, что при любой такой раскладке найдутся хотя бы два пакета одинакового веса.
Докажите, что
**а)** есть по крайней мере 200 яблок одинакового веса;
**б)** есть раскладка, когда по крайней мере 3 пакета весят одинаково.

### Разбиения с небольшой разницей

**5. Лемма о выборе.** Несколько груш разбили на группы, не более 5 штук в каждой группе. Из каждой группы взяли самую тяжелую грушу. Докажите, что выбрано по весу не менее 20% всех груш.

**6. Лемма о цене игры.** На столе лежат несколько кусков шоколада, самый большой весит $b$. Петя начинает, и они с Васей по очереди съедают по куску, пока не съедят всё. Докажите, что при наилучших действиях Васи Петя сможет съесть **а)** больше Васи; **б)** не более, чем на $b$ больше Васи.

**7. Лемма о способах выбора.** Есть $2n$ кусков сыра. Докажите, что можно не менее чем $2^n$ способами разложить их по $n$ штук на две чаши весов так, чтобы разность весов чаш была не больше веса самого тяжелого куска.

**8.** В 31 ящике лежит смесь апельсинов и бананов. Докажите, что можно так выбрать
**а)** 16 ящиков, что в них окажется по весу не менее половины всех апельсинов и не менее половины всех бананов;
**б)** 11 ящиков, что в них окажется по весу не менее трети всех апельсинов и не менее трети всех бананов.

## Зачетные задачи

**КО0.** Есть 5 кусков сыра разного веса. Про любые два известно, который тяжелее. Известно также, что можно разложить весь сыр на две кучки равного веса. Как можно сделать это за два взвешивания на чашечных весах без гирь?

**КО1.** Есть 100 фруктов. Назовем натуральное число $k<100$ хорошим, если найдется $k$ фруктов, чей вес равен ровно половине общего веса. Каково наибольшее возможное количество хороших чисел?

**КО2.** На столе лежат 10 кусков сыра. Петя берет себе самый маленький (по весу) кусок. Затем он режет один из кусков на столе на две части, и снова берет себе самый маленький из получившихся 10 кусков. Эти действия: разрезание и взятие куска – Петя повторяет, пока у него не наберется 9 кусков. Докажите, что Петя возьмет себе не более половины сыра (по весу).

**КО3.** Есть 1000 яблок, которые надо разложить в 10 пакетов по 100 яблок в каждом. Оказалось, что при любой такой раскладке найдутся хотя бы два пакета одинакового веса.
При каком наибольшем $k$ можно заведомо утверждать, что найдутся $k$ яблок одинакового веса?