

## Непрерывная комбинаторика: комбинации и оценки

В некоторых задачах возникают комбинации из *конечного* числа объектов нецелого веса. Важным приемом является упорядочение объектов.

1. Есть несколько камней, выложенных в порядке возрастания весов. За какое наименьшее число взвешиваний на чашечных весах без гирь можно проверить или опровергнуть утверждение: Любые два камня вместе тяжелее одного?

2. Сборные Перу и Чили (по 10 игроков в каждой) намерены сыграть серию матчей по борьбе, где более сильный игрок всегда побеждает более слабого. Для каждого матча организуется 10 пар: перуанец против чилийца, в каждой паре побеждает один из соперников, счет в матче – по числу побед. Организаторам известны сравнительные силы игроков внутри каждой из команд, но не между игроками из разных стран. Они собираются устраивать матчи до тех пор, пока какой-нибудь матч не закончится вничью (или пока не выяснится, что ничейный матч невозможен). Каким наименьшим числом матчей они всегда могут обойтись?

3. Имеются 300 яблок, любые два из которых различаются по весу не более, чем в три раза. Докажите, что их можно разложить в пакеты по четыре яблока так, чтобы любые два пакета различались по весу не более, чем в полтора раза.

4. Есть 1000 яблок, которые надо разложить в 10 пакетов по 100 яблок в каждом. Оказалось, что при любой такой раскладке найдутся хотя бы два пакета одинакового веса.

Докажите, что

а) есть по крайней мере 200 яблок одинакового веса;

б) есть раскладка, когда по крайней мере 5 пакетов весят одинаково.

### Разбиения с небольшой разницей

5. Фома и Ерема делят кучу из кусков сыра. Сперва Фома, если хочет, выбирает один кусок и и режет его на два. Затем он раскладывает сыр на две кучки. Затем Ерема выбирает кучку для дележки, и они ее делят, беря себе по очереди по куску, первый Ерема. Точно так же они делят и вторую кучку, только первым выбирает Фома. Докажите, что Фома всегда может действовать так, чтобы получить не менее половины сыра (по весу).

6. В 31 ящике лежит смесь апельсинов и бананов. Докажите, что можно так выбрать

а) 16 ящиков, что в них окажется по весу не менее половины всех апельсинов и не менее половины всех бананов;

б) 11 ящиков, что в них окажется по весу не менее трети всех апельсинов и не менее трети всех бананов.

**Лемма 7.** Есть  $2n$  кусков сыра. Докажите, что можно не менее чем  $2^n$  способами разложить их по  $n$  штук на две чаши весов так, чтобы разность весов чаш была не больше веса самого тяжелого куска.

**Лемма 8.** В  $2n$  ящиках лежат сливы и вишни. В каждом ящике слив не более  $s$  кг, а вишен не более  $v$  кг. Докажите, что ящики можно разделить на две группы по  $n$  штук, так чтобы общий вес слив в группах отличался не больше чем на  $s$ , а вишен – не больше чем на  $v$ .

### Зачетные задачи

**Зад9.** В 100 ящиках лежат яблоки, апельсины и бананы. Докажите, что можно так выбрать 51 ящик, что в них окажется не менее половины всех яблок, не менее половины всех апельсинов и не менее половины всех бананов.

**КО1.** Есть 100 фруктов. Назовем натуральное число  $k < 100$  хорошим, если найдется  $k$  фруктов, чей вес равен ровно половине общего веса. Каково наибольшее возможное количество хороших чисел?

**КО2.** На столе лежат 10 кусков сыра. Петя берет себе самый маленький (по весу) кусок. Затем он режет один из кусков на столе на две части, и снова берет себе самый маленький из получившихся 10 кусков. Эти действия: разрезание и взятие куска – Петя повторяет, пока у него не наберется 9 кусков. Докажите, что Петя возьмет себе не более половины сыра (по весу).

**КО3.** Есть 1000 яблок, которые надо разложить в 10 пакетов по 100 яблок в каждом. Оказалось, что при любой такой раскладке найдутся хотя бы два пакета одинакового веса. При каком наибольшем  $k$  можно заведомо утверждать, что найдутся  $k$  яблок одинакового веса?

**КО4.** Есть 100 слив с косточками. Веса любых двух слив отличаются не более, чем вдвое, и веса любых двух косточек тоже отличаются не более, чем вдвое. Общий вес косточек втрое меньше общего веса слив. Докажите, что сливы можно разделить на две кучки по 50 штук так, чтобы в каждой кучке доля косточек была меньше 35%.