

ЗАПУСТИ ПРОЦЕСС

Запустив процесс, можно «по цепочке» распространить свойство.

1. В последовательности целых чисел каждый член (кроме первого) на 12 больше суммы двух своих соседей. 20-й член равен 2018. Докажите, что в последовательности нет двух соседних членов кратных 18.

Получить искомую конструкцию можно методом последовательных улучшений. Можно конструкцию разобрать, а затем собрать заново, добавляя деталь за деталью.

2. Есть несколько кусков сыра, каждый – не тяжелее 100 г. Докажите, что их все можно разложить на две кучки так, чтобы веса кучек отличались не более чем на 100 г.

3. Среди 50 школьников каждый знаком не менее чем с 25 другими. Докажите, что можно их разбить на группы из 2 или 3 человек так, чтобы каждый был знаком со всеми в своей группе.

4. На окружности отмечено 300 точек: по 100 точек синего, красного и зелёного цветов. Докажите, что можно провести 150 отрезков с концами в этих точках, соблюдая такие правила: 1) никакие два отрезка не пересекаются (даже в концах); 2) концы каждого отрезка — разного цвета.

При сборке детали не обязательно добавлять по одной. Можно соединять и куски из нескольких деталей, уменьшая общее число кусков.

5. На кольцевой дороге стоят несколько одинаковых автомобилей. Известно, что общего количества бензина в них достаточно на полный круг по кольцу. Докажите, что найдется автомобиль, который сможет проехать полный круг, забирая бензин у других автомобилей по мере проезда мимо них.

Свяжите с конструкцией величину, меняющийся в одну сторону при улучшениях (*полуинвариант*). Если полуинвариант нельзя менять бесконечно, то его крайнее значение даст искомый результат (*принцип крайнего*), или докажет, что исходная конструкция невозможна (*бесконечный спуск*).

6. У каждого депутата в парламенте не более трех врагов (вражда взаимна). Докажите, что можно разбить парламент на две палаты так, чтобы у каждого было в своей палате не более одного врага.

7. На плоскости даны 100 красных и 100 синих точек, никакие три из них не лежат на одной прямой. Докажите, что можно провести 100 непересекающихся отрезков с концами разных цветов.

8. В $2n$ ящиках лежат сливы и вишни. В каждом ящике слив не более c кг, а вишен не более v кг. Докажите, что ящики можно разделить на две группы по n штук, так чтобы общий вес слив в группах отличался не больше чем на c , а вишен – не больше чем на v .

9. На координатной плоскости лежит правильный пятиугольник. Докажите, что хотя бы у одной из его вершин есть не целая координата.

Зачетные задачи

ЗП1. На окружности расставлено несколько положительных чисел, каждое из которых не больше 1. Докажите, что можно разделить окружность на сто дуг так, что суммы чисел на соседних дугах будут отличаться не больше чем на 1. (Если на дуге нет чисел, то сумма на ней считается равной нулю.)

ЗП2. Натуральное число кратно 4. Все его делители выписали в строку в порядке возрастания. Докажите, что в этой строке найдется пара соседей с разностью 2.

ЗП3. Фома придумал секретный шифр: каждая буква заменяется на слово длиной не больше 10 букв. Шифр называется хорошим, если всякое зашифрованное слово расшифровывается однозначно. Ерёма убедился (с помощью компьютера), что если зашифровать слово длиной не больше 10000 букв, то результат расшифровывается однозначно. Следует ли из этого, что шифр хороший? (В алфавите 33 буквы).

ЗП4. Шайка разбойников отобрала у купца мешок монет. Каждая монета стоит целое число грошей. Оказалось, что какую бы монету ни отложить, оставшуюся сумму можно разделить между разбойниками поровну. Докажите, что если отложить одну монету, то число монет разделится на число разбойников.

Московские сборы, 10В класс, А.Шаповалов. 7 ноября 2018 г.