

Неоднозначные данные

«А это вам знать пока рано», — сказала Баба-Яга своим 33 ученикам и скомандовала: «Закройте глаза!». Правый глаз закрыли все мальчики и треть девочек. Левый глаз закрыли все девочки и треть мальчиков. Сколько учеников все-таки увидели то, что знать пока рано?

Неразличимые примеры

Чтобы доказать, что информации недостаточно для получения однозначного ответа, можно построить два примера, которые удовлетворяют всем условиям, но дают разные ответы.

1. В ряд выписаны 100 чисел, первое равно 3, а сумма любых трех подряд равна 100. Можно ли наверняка узнать, чему равно
(a) 100-е число? (b) 50-е число?
2. (a) Незнайка утверждает, что он может узнать с помощью чашечных весов без гирь, есть ли среди любых трех камней такой, вес которого равен $1/3$ общего веса. Не хвастает ли он?
(b) А узнать, есть ли среди десяти камней камень веса $1/10$ от общего веса?
3. Все виды растений одной страны были занумерованы подряд натуральными числами от 2 до 20000 (числа идут без пропусков и повторений). Для каждой пары видов растений запомнили наибольший общий делитель их номеров, а сами номера были забыты (в результате сбоя компьютера). Можно ли для каждого вида растений восстановить его номер?
4. У Кащей есть куб, в каждой вершине которого вставлено по алмазу. Известны веса этих алмазов: 1 карат, 2 карата, ..., 8 карат. Кащей предлагает Ивану Царевичу такую игру: он сообщает Ивану сумму весов алмазов на каждом ребре. Если после этого Иван правильно назовет, куда какой по весу алмаз вставлен, то получит этот куб вместе с алмазами, а если хотя бы в одном месте ошибется, то распрощается с головой. Стоит ли Ивану соглашаться играть?

Примеры «задним числом»

Неразличимые примеры и контрпримеры могут строиться после того, как испытания уже проведены и ответы даны, с использованием уже полученной информации. Этот метод часто применяется, чтобы опровергнуть предположение о наличие «гарантированного» алгоритма.

5. На плоскости расположен квадрат, и невидимыми чернилами нанесена точка P . Человек в специальных очках видит точку. Если провести прямую, то он отвечает на вопрос, по какую сторону от нее лежит P (если P лежит на прямой, то он говорит, что P лежит на прямой). Нужно определить, лежит ли точка P внутри квадрата. Можно ли это наверняка узнать
(а) за два вопроса? (б) за три вопроса?
6. Путешественник посетил деревню, каждый житель которой либо всегда говорит правду, либо всегда лжет. Все жители деревни встали в круг лицом к центру, и каждый сказал путешественнику про соседа справа, правдив ли тот. На основании этих сообщений путешественник смог однозначно определить, какую долю от всех жителей составляют лжецы. Определите и вы, чему она равна.
7. Суду предъявлен набор из 100 одинаковых с виду монет. Суд знает, что все настоящие монеты весят одинаково, фальшивые — тоже одинаково, но легче настоящих. Адвокат знает, какие монеты на самом деле фальшивые. Задача адвоката: показать суду, сколько есть фальшивых монет, не разгласив ни про какую монету, фальшивая она или настоящая. (Адвокат должен делать взвешивания на чашечных весах без гирь. Число взвешиваний не ограничено. Запрещены взвешивания и группы взвешиваний, из которых логически выводится, что конкретная монета фальшивая или настоящая.)
(а) Суд уже установил, что фальшивых монет 3 или 4. Как адвокату показать, что их ровно 4?
(б) Суд уже установил, что фальшивых монет 0 или 4. Как адвокату показать, что их ровно 4?
8. Капитан Врунгель в своей каюте разложил перетасованную колоду из 52 карт по кругу, оставив одно место свободным. Матрос Фукс с палубы, не отходя от штурвала и не зная начальной раскладки, называет карту. Если эта карта лежит рядом со свободным местом, Врунгель ее туда передвигает, не сообщая Фуку. Иначе ничего не происходит. Потом Фукс называет еще одну карту, и так сколько угодно раз, пока он не скажет «стоп». Может ли Фукс добиться, чтобы после «стопа» рядом со свободным местом наверняка не было туза пик?

Домашнее задание

1. *Письменная задача.* В колоде 52 карты (4 масти, 13 достоинств). Про любую пару карт одной масти или одного достоинства известно, сколько карт между ними лежит. Всегда ли по этой информации можно узнать пару крайних карт колоды?
2. (а) В клетки доски 8×8 записали числа $1, 2, \dots, 64$ в неизвестном порядке. Разрешается узнать сумму чисел в любой паре клеток с общей стороной. Всегда ли можно узнать расположение всех чисел?
(б) То же для доски 9×9 и чисел от 1 до 81.

3. У N ключей от N гостиничных номеров потерялись бирки. Известно, что каждый ключ открывает ровно один из номеров. Какое наименьшее число пробных открываний дверей надо сделать, чтобы наверняка определить, от какого номера каждый ключ?

Дополнительные задачи

4. Суду предъявлен набор из 100 одинаковых с виду монет. Суд знает, что все настоящие монеты весят одинаково, фальшивые — тоже одинаково, но легче настоящих. Адвокат знает, какие монеты на самом деле фальшивые. Задача адвоката: показать суду, сколько есть фальшивых монет, не разгласив ни про какую монету, фальшивая она или настоящая. (Адвокат должен делать взвешивания на чашечных весах без гирь. Число взвешиваний не ограничено. Запрещены взвешивания и группы взвешиваний, из которых логически выводится, что конкретная монета фальшивая или настоящая.)
- (a) Суд уже установил, что фальшивых монет 2 или 3. Как адвокату показать, что их ровно 3?
- (b) Суд уже установил, что фальшивых монет 2, 3 или 4. Как адвокату показать, что их ровно 3?
- (c) Суду о числе фальшивых монет ничего не известно. Как адвокату показать, что их ровно 10?
5. Из колоды вынули 7 карт, показали всем, перетасовали, и раздали Грише и Леше по 3 карты, а оставшуюся карту
- (a) спрятали; (b) отдали Коле.
- Игроки могут по очереди сообщать вслух открытым текстом любую информацию о своих картах. Могут ли сообщить друг другу свои карты так, чтобы при этом Коля не смог вычислить местонахождение ни одной из карт (кроме той, что у него)?