

Свяжитесь с графом

Считаем ребра, вершины и компоненты без циклов. Обозначим в графе V — число вершин, R — число ребер, C — число компонент связности.

Факт 1.

- (a) В дереве (то есть связном графе без циклов) $V = R + 1$.
- (b) В графе без циклов $V = R + C$.

Факт 2.

- (a) В связном графе $R \geq V - 1$.
- (b) В любом графе $R \geq V - C$.

1. Какое наибольшее число ребер можно перекусить в проволочном каркасе додекаэдра так, чтобы каркас не развалился на части?
2. Пусть дан связный граф с n вершинами и k ребрами, причем $k > n - 1$. Докажите, что можно удалить ребро так, чтобы граф остался связным.
3. В многоугольнике проведены все диагонали из одной вершины. Можно ли стороны и проведённые диагонали раскрасить в желтый и красный цвета так, чтобы жук мог проползти из любой вершины в любую другую по желтым отрезкам, а клоп — по красным?
4. Из спичек сложена шахматная доска. Жук через спичку не ползает. Убрал часть спичек внутри доски, получаем *лабиринт*. Назовем его *связным*, если жук может проползти между любыми двумя клетками. Каких лабиринтов можно получить больше: связных или не связных?

Увидеть граф за условием задачи помогают *выделенные* пары объектов, в частности, соседние объекты или клетки с общей границей. Выписывая для таких графов уравнения и неравенства для V , R , C , можно получать нетривиальные оценки.

5. Есть m болельщиков: некоторые из них (возможно, все или никто) болеют за «Спартак», а остальные — за «Динамо». Разрешается спросить у любых двоих, болеют ли они за разные команды, и они честно ответят «да» или «нет». Требуется посадить болельщиков в два автобуса так, чтобы в каждом были болельщики только одной команды. За какое минимальное количество вопросов это наверняка можно сделать?
6. Тетрадный лист раскрасили в 23 цвета по клеткам (при этом все цвета присутствуют). Пара цветов называется *хорошей*, если найдутся две соседние клетки, закрашенные этими цветами. Каково минимальное число хороших пар?
7. В классе 30 человек. За месяц было 29 дежурств, в каждом дежурила пара учеников. Докажите, что можно так выставить всем ученикам класса по одной

оценке по 5-балльной шкале, что будет выставлена хотя бы одна пятерка, и в каждой паре дежуривших сумма оценок будет равна 8.

8. На клетчатой бумаге нарисован многоугольник площадью в n клеток. Его контур идет по линиям сетки. Каков наибольший периметр многоугольника? (Сторона клетки равна 1).
 9. Дан клетчатый прямоугольник $m \times n$. Каждую его клетку разрезали по одной из диагоналей. На какое наименьшее число частей мог распасться прямоугольник?
 10. Есть 100 камней разного веса. За одно взвешивание можно про любые два камня узнать, который из них тяжелее. За какое наименьшее число взвешиваний можно наверняка определить самый тяжелый камень?
-

Домашнее задание

1. Куб со стороной $n \geq 3$ разбит перегородками на единичные кубики. Какое минимальное число перегородок между кубиками нужно удалить, чтобы из каждого кубика можно было добраться до границы куба?
2. На клетчатой бумаге по границам клеток обведен тысячеугольник. Из какого наименьшего числа клеток он может состоять?
3. Какое наибольшее число клеток доски 9×9 можно разрезать по обеим диагоналям, чтобы при этом доска не распалась на несколько частей?
4. Есть 101 банка консервов весами 1001 г, 1002 г, ..., 1101 г. Этикетки с весами потерялись, но завхозу кажется, что он помнит, какая банка сколько весит. Он хочет убедиться в этом за наименьшее число взвешиваний.
 - (а) У завхоза есть двое чашечных весов: одни точные, другие — грубые. За одно взвешивание можно сравнить две банки. Точные весы всегда показывают, какая банка тяжелее, а грубые — только если разница больше 1,1 г (а иначе показывают равновесие). Завхоз может использовать только одни весы. Какие ему следует выбрать?
 - (б) У завхоза есть только грубые весы. Какое наименьшее число взвешиваний ему понадобится?

Дополнительные задачи

5. Из спичек выложена доска 8×8 так, что каждую клетку ограничивают четыре спички. Какое наименьшее число спичек можно убрать, чтобы после этого не осталось ни одного контура прямоугольника?
6. Есть $2n$ болельщиков: половина из них болеют за «Спартак», а остальные — за «Динамо». Разрешается спросить у любых двоих, болеют ли они за разные

команды, и они честно ответят «да» или «нет». Требуется посадить болельщиков в два автобуса так, чтобы в каждом были болельщики только одной команды. За какое минимальное количество вопросов это наверняка можно сделать?

7. Дана доска $m \times n$, разбитая на единичные клетки. Сначала в $(m-1) \cdot (n-1) + 1$ клеток ставится по фишке. Назовем *квartetом* четверку клеток

(а) в квадратике 2×2 ; (б) в вершинах прямоугольника со сторонами, параллельными краям доски.

Если в квартете есть ровно одна фишка, ее разрешается снять. Докажите, что разрешенными операциями нельзя снять все фишки.

8. Хозяйка испекла для гостей пирог. За столом может оказаться либо p человек, либо q (p и q взаимно просты). На какое минимальное количество кусков (не обязательно равных) нужно заранее разрезать пирог, чтобы в любом случае его можно было раздать поровну?