Увидеть граф — 1

Позиции и ходы

1. (a) На прямой сидят два кузнечика. Каждую минуту один из кузнечиков перепрыгивает ровно через одного другого. Могут ли все кузнечики оказаться на своих местах ровно через 777 прыжков?
(b) То же, но кузнечиков не два, а три.

2. На шахматной доске 5×5 расставили максимальное число коней так, чтобы они не били друг друга. Докажите, что такая расстановка — единственная.

3. (a) На шахматной доске стоят две одинаковых фишки. За один ход можно сдвинуть одну из фишек на соседнее поле по вертикали или горизонтали. Могут ли фишки перейти в симметричную относительно средней линии позицию ровно за 2015 ходов?
(b) На шахматной доске стоят пять одинаковых фишек. За один ход можно сдвинуть одну из фишек на соседнее поле по вертикали или горизонтали. Могут ли фишки перейти в центрально симметричную позицию ровно за 2015 ходов?

Сумма степеней вершин

Факт 1. Сумма степеней вершин графа вдвое больше числа его ребер.

Факт 2. В конечном графе число вершин нечетной степени четно.

4. В классе учится 10 мальчиков и 15 девочек. Они отправили друг другу смски. Может ли у каждого число отправленных смсок отличается на 1 от числа полученных?

5. В пустые клетки доски 5×5 Петя по одному вписывал числа. Вписанное число равнялось количеству соседних по стороне клеток, в которые уже был вписаны числа. Петя заполнил всю доску. Найдите сумму все чисел и докажите, что она не зависит от порядка заполнения.

6. В однокруговом турнире участвовали 15 команд. Докажите, что хотя бы в одной игре встретились команды, которые перед этой игрой участвовали в сумме в нечетном числе игр этого турнира.

Чередование и обходы

Определение. Граф — *двудольный,* если его вершины можно раскрасить в два цвета так, что не будет ребер с концами одинакового цвета. Пример: любое дерево.

7. Докажите, что следующие графы — двудольные:

(a) Вершины графа — расстановка пары фишек на шахматной доске. Две расстановки связаны ребром, если позиции получаются друг из друга ходом фишки на одну клетку по вертикали или горизонтали.

(b) То же, что в предыдущем пункте, но для n фишек.

(c) Вершины — перестановки из n чисел $1, 2, \ldots, n$, ребра — расположения, получающиеся друг из друга перестановкой двух соседних чисел.

(d) Вершины — перестановки из n чисел $1, 2, \ldots, n$, ребра — расположения, получающиеся друг из друга перестановкой двух любых чисел.

8. Пусть Γ — двудольный граф с черными и белыми вершинами. Докажите, что

(a) Если в Γ есть замкнутый цикл, проходящий через каждую вершину ровно по одному разу, то вершин каждого цвета — поровну.

(b) Если в Γ есть путь, проходящий через каждую вершину ровно по одному разу, то число белых вершин отличается от числа черных вершин не более чем на 1.

9. Замок в форме треугольника со стороной 50 метров разбит на 100 треугольных залов со сторонами 5 м. В каждой стенке между залами есть дверь. Какое наибольшее число залов сможет обойти турист, не заходя ни в какой зал дважды?

10. Для игры в классики на земле нарисован ряд клеток, в которые вписаны по порядку числа от 1 до 10, как на рисунке.

1	4	5	8	9
2	3	6	7	10

Маша прыгнула снаружи в клетку 1, затем попрыгала по остальным клеткам (каждый прыжок — на соседнюю по стороне клетку) и выпрыгнула наружу из клетки 10. Известно, что на клетке 1 Маша была один раз, на клетке 2 — два раза, ..., на клетке 9 — девять раз. Сколько раз побывала Маша на клетке 10?

11. (a) Отмечены вершины и центры граней куба и проведены диагонали всех граней. Можно ли по отрезкам этих диагоналей обойти все отмеченные точки, побывав в каждой из них ровно по одному разу?

(b) В кубике Рубика $3 \times 3 \times 3$ отмечены вершины клеток, середины сторон клеток и центры клеток. Центры клеток соединены отрезками с серединами сторон клеток. Можно ли по проведенным отрезкам и сторонам клеток обойти все отмеченные точки, побывав в каждой из них ровно по одному разу?

Домашнее задание

1. В клетки доски 8×8 записали числа $1, 2, \ldots, 64$ в неизвестном порядке. Разрешается узнать сумму чисел в любой паре клеток, связанных ходом коня. Всегда ли можно узнать расположение всех чисел?

2. Можно ли расставить в вершинах пятиугольной призмы натуральные числа так, чтобы в каждой паре чисел, связанных ребром, одно из них делилось на другое, а во всех других парах такого не было?

3. 10 кружковцев образовали дежурную команду для решения домашних задач. В команде всегда не менее 3 человек. Каждый вечер в команду добавляется один человек либо из нее исключается один человек. Можно ли будет перебрать все допустимые составы команды ровно по одному разу?

4. На свободные поля шахматной доски по одному выставляются короли. Первый выставляется произвольно, каждый следующий должен бить нечетное число ранее выставленных. Какое наибольшее число королей можно выставить?

Дополнительные задачи

5. Поверхность куба $11 \times 11 \times 11$ разбита на клетки 1×1. Муравей бегает по диагоналям клеток, нигде не поворачивая назад. Он не может бывать внутри одной клетки более одного раза, но может несколько раз проходить одну вершину. Может ли он посетить центры всех клеток?

6. Имеется несколько юношей, каждый из которых знаком с некоторыми девушками. Две свахи знают, кто с кем знаком. Одна сваха заявляет: «Я могу одновременно женить всех брюнетов так, чтобы каждый из них женился на знакомой ему девушке!». Вторая сваха говорит: «А я могу устроить судьбу всех блондинок: каждая выйдет замуж за знакомого юношу!». Этот диалог услышал любитель математики, который сказал: «В таком случае можно сделать и то, и другое!». Прав ли он?

7. Гриша записал в клетки шахматной доски числа $1, 2, \ldots, 64$ в неизвестном порядке. Он сообщил Леше сумму чисел в каждом прямоугольнике из двух клеток и добавил, что 1 и 64 лежат на одной диагонали. Докажите, что по этой информации Леша может точно определить, где какое число записано.

8. Есть много одинаковых бумажных квадратов, в которых проведены обе диагонали. Квадратами оклеили куб $100 \times 100 \times 100$ без щелей и наложений (при этом, возможно, перегибая квадраты через ребра и располагая косо). Жучка посадили в одну из вершин куба и разрешили ползать только по диагоналям квадратов. Докажите, что он может добраться в какую-то другую вершину куба.