

Дискретная непрерывность и разрывы

Если какая-то целочисленная величина в процессе меняется на каждом шаге не больше чем на 1 (в ту или другую сторону), то она обязательно проходит через все промежуточные значения между начальным и конечным. Такая величина называется дискретной, а прием — дискретной непрерывностью. . .

1. На доске было записано число 1. За один шаг число, имеющееся на доске, либо умножали на произвольное однозначное число, либо прибавляли к нему произвольное однозначное число, и результат записывали вместо него. Через некоторое время на доске оказалось записано стозначное число. Верно ли, что в какой-то момент на доске было записано тридцатизначное число?
2. (а) В баскетбольном матче первым забил «Зенит», а выиграл «Спартак». Команды в сумме набрали более 100 очков. Верно ли, что в какой-то момент счет был ничейный? (Попадание в корзину «с игры» приносит команде 2 или 3 очка)
(б) В футбольном матче первым забил «Зенит», а выиграл «Спартак». Докажите, что в какой-то момент счет был ничейный.
3. В ряд выложены 200 шаров, из них 100 черных и 100 красных, причем первый и последний шары — черные. Докажите, что можно убрать с правого края несколько шаров подряд так, чтобы красных и черных шаров осталось поровну.

Полезно раскрасить объекты в два цвета так, чтобы граница или разрыв отделяли цвета.

4. В последовательности целых чисел каждое число, начиная со второго, на 1 больше предыдущего или в 3 раза меньше предыдущего. Первое число равно 1, последнее равно 100. Докажите, что среди чисел есть и 77.
5. В ряд лежат 100 яблок, соседние отличаются не более чем на 10 г. Докажите, что если выложить яблоки в ряд по возрастанию веса, то и тогда соседние будут отличаться не более чем на 10 г.

Если процесса нет, организуй сам. Подбери начало и конец процесса так, чтобы они были по разные стороны от нужного значения.

6. В ряд сидят 15 мальчиков и 15 девочек.
(а) Докажите, что можно выбрать 10 школьников подряд, чтобы среди них мальчиков и девочек было поровну.
(б) Всегда ли из них можно выбрать 20 школьников подряд, среди которых мальчиков и девочек поровну?
7. (а) По кругу сидят 30 школьников, среди них мальчиков и девочек поровну. Докажите, что можно выбрать 20 школьников подряд, чтобы среди них маль-

чиков и девочек было поровну.

(b) По кругу сидят 30 школьников, среди них мальчиков и девочек поровну. Докажите, что можно выбрать 18 школьников подряд, чтобы среди них мальчиков и девочек было поровну.

В некоторых процессах полезно начало и конец поменять местами. Тут помогает расположение на окружности.

8. На клетчатой доске 100×100 стоит 1000 шашек.

(a) Докажите, что где бы они не стояли, доску можно разрезать по границам клеток на две части, в одной из которых будет 300 шашек.

(b) Докажите, что где бы они не стояли, доску можно разрезать по границам клеток на две равные части с равным количеством шашек.

Домашнее задание

1. В стране Ш. человек считается богатым, если его зарплата больше зарплат премьер-министра. В этой стране богатые мужчины предпочитают жениться на бедных женщинах. Все зарплаты в стране различные. Докажите, что можно премьер-министру установить такую зарплату, чтобы количество богатых мужчин было в точности равно количеству бедных женщин.

2. В ряд стоят несколько солдат. Рост соседей отличается не более чем на 2,4 см.
(a) В строю есть солдат ростом 152 см, и солдат ростом 198 см. Докажите, что есть солдат, чей рост отличается от 170 см не более, чем на 1,2 см.
(b) Докажите, что если солдаты встанут по росту, то по-прежнему рост соседей будет отличаться не более, чем на 2,4 см.

3. На бесконечной шахматной доске стоят две белые ладьи и невидимый черный король. Известно, что король может дойти до одной ладьи (известно, какой) за 100 ходов. Ходят по очереди. Докажите, что ладьи смогут поставить шах.

4. В одном из 100 окопов, расположенных в ряд, спрятался робот-пехотинец. Автоматическая пушка может одним выстрелом накрыть любой окоп. В каждом промежутке между выстрелами робот (если уцелел) обязательно перебегает в соседний окоп (быть может, только что обстрелянный).

(a) Известно, что вначале слева от робота — нечетное число пустых окопов. Сможет ли пушка наверняка накрыть робота?

(b) Вначале робот может быть в любом из окопов. Сможет ли пушка наверняка накрыть робота?