

Дискретная непрерывность и разрывы

Если какая-то целочисленная величина в процессе меняется на каждом шаге не больше чем на 1 (в ту или другую сторону), то она обязательно проходит через все промежуточные значения между начальным и конечным. Такая величина называется дискретной, а прием — дискретной непрерывностью. . .

- В баскетбольном матче первым забил «Зенит», а выиграл «Спартак». Команды в сумме набрали более 100 очков. Верно ли, что в какой то момент счет был ничейный? (Попадание в корзину «с игры» приносит команде 2 или 3 очка)
 - В футбольном матче первым забил «Зенит», а выиграл «Спартак». Докажите, что в какой то момент счет был ничейный.
- В ряд выложены 200 шаров, из них 100 черных и 100 красных, причем первый и последний шары — черные. Докажите, что можно убрать с правого края несколько шаров подряд так, чтобы красных и черных шаров осталось поровну.

Полезно раскрасить объекты в два цвета так, чтобы граница или разрыв отделяли цвета.

- В последовательности целых чисел каждое число, начиная со второго, на 1 больше предыдущего или в 3 раза меньше предыдущего. Первое число равно 1, последнее равно 100. Докажите, что среди чисел есть и 77.
- В ряд лежат 100 яблок, соседние отличаются не более чем на 10 г. Докажите, что если выложить яблоки в ряд по возрастанию веса, то и тогда соседние будут отличаться не более чем на 10 г.

Если процесса нет, организуй сам. Подбери начало и конец процесса так, чтобы они были по разные стороны от нужного значения.

- В ряд сидит 15 мальчиков и 15 девочек.
 - Докажите, что можно выбрать 10 школьников подряд, чтобы среди них мальчиков и девочек было поровну.
 - Всегда ли из них можно выбрать 20 школьников подряд, среди которых мальчиков и девочек поровну?
- По кругу сидят 30 школьников, среди них мальчиков и девочек поровну. Докажите, что можно выбрать 20 школьников подряд, чтобы среди них мальчиков и девочек было поровну.
 - По кругу сидят 30 школьников, среди них мальчиков и девочек поровну. Докажите, что можно выбрать 18 школьников подряд, чтобы среди них мальчиков и девочек было поровну.

Через промежуточное значение можно не только пройти, но и перепрыгнуть.

7. (a) В строке четырехзначных чисел первое число 2015, последнее 2051. Соседние числа отличаются на 1 или на 100. Верно ли, что хотя бы одно число делится на 101?
(b) Дополнительно известно, что ни одно число не делится на 100. Докажите, что хотя бы одно число делится на 101.

В некоторых процессах полезно начало и конец поменять местами. Тут помогает расположение на окружности.

8. На окружности отмечены 77 точек, среди них нет диаметрально противоположных. Докажите, что можно провести диаметр через одну из точек так, что по обе стороны диаметра точек окажется поровну.
9. На клетчатой доске 100×100 стоит 1000 шашек.
(a) Докажите, что где бы они не стояли, доску можно разрезать по границам клеток на две части, в одной из которых будет 300 шашек.
(b) Докажите, что где бы они не стояли, доску можно разрезать по границам клеток на две равные части с равным количеством шашек.

Из соображений непрерывности чаще всего доказывают существование или невозможность некоего объекта или конструкции, не предъявляя его явно. Однако дискретная непрерывность бывает полезна и в задачах на конструкцию. Например, построив алгоритм, докажем через непрерывность, что он работает.

10. На бесконечной шахматной доске стоят две белые ладьи и невидимый черный король. Известно, что король может дойти до одной ладьи (известно, какой) за 100 ходов. Ходят по очереди. Докажите, что ладьи смогут поставить шах.

Домашнее задание

1. В ряд стоят несколько солдат. Рост соседей отличается не более чем на 2,4 см.
(a) В строю есть солдат ростом 152 см, и солдат ростом 198 см. Докажите, что есть солдат, чей рост отличается от 170 см не более, чем на 1,2 см.
(b) Докажите, что если солдаты встанут по росту, то по-прежнему рост соседей будет отличаться не более, чем на 2,4 см.
2. За круглым столом равномерно посажены 100 дедов, причем у любых двух соседей количество волос в бородах отличается не больше, чем на 100. Докажите, что найдется пара дедов, сидящих напротив друг друга, у которых количество волос в бородах также отличается не больше, чем на 100.
3. В круге проведены несколько хорд так, что любые две из них пересекаются внутри круга. Докажите, что можно пересечь все хорды одним диаметром.
4. В одном из 100 окопов, расположенных в ряд, спрятался робот-пехотинец. Автоматическая пушка может одним выстрелом накрыть любой окоп. В каждом промежутке между выстрелами робот (если уцелел) обязательно перебегает в соседний окоп (быть может, только что обстрелянный).

- (а) Известно, что вначале слева от робота — нечетное число пустых окопов. Сможет ли пушка наверняка накрыть робота?
- (б) Вначале робот может быть в любом из окопов. Сможет ли пушка наверняка накрыть робота?

Дополнительные задачи

5. На бесконечной шахматной доске стоят две белые ладьи и невидимый черный король. Про положение короля ничего не известно. Ходят по очереди. Докажите, что ладьи смогут поставить шах.
6. Дракон заточил рыцаря в темницу и выдал ему 100 различных монет, половина из которых — фальшивые (но какие именно — знает только дракон). Каждый день рыцарь раскладывает монеты на две кучки (не обязательно равные). Если в какой-то день в этих кучках окажется поровну настоящих монет, либо поровну фальшивых, то дракон отпустит рыцаря. Сможет ли рыцарь гарантированно освободиться не позже, чем на двадцать пятый день?
7. Вершины пятидесятиугольника делят окружность на 50 дуг, длины которых равны числам $1, 2, 3, \dots, 50$, взятым в каком-то порядке. Каждая пара «противоположных» дуг (соответствующих противоположным сторонам 50-угольника) отличается по длине на 25. Докажите, что у пятидесятиугольника найдется пара параллельных сторон.
8. Дано натуральное число. Разрешается расставить между цифрами числа плюсы произвольным образом и вычислить сумму (например, из числа 123456789 можно получить $12345 + 6 + 789 = 13140$). С полученным числом снова разрешается выполнить подобную операцию, и так далее. Докажите, что из любого числа можно получить однозначное, выполнив не более 10 таких операций.