

## Конечное и бесконечное

### Дирихле на бесконечности

Если бесконечную кучу разделить на конечное число частей, хотя бы одна из частей должна быть бесконечной.

1. Докажите, что есть бесконечно много простых чисел, дающих при делении на 2015 одинаковый остаток.
2. Докажите, что среди цифр в десятичной записи  $\sqrt{2}$  есть две цифры, каждая из которых встречается бесконечно много раз.
3. Круг разделен на 2015 секторов, и в каждом написано целое число. В один из секторов ставится фишка. Каждым ходом прочитывается число в секторе, где стоит фишка (пусть прочитано  $k$ ), фишка сдвигается на  $|k|$  секторов по часовой стрелке, и там, куда она придет, число увеличивается на 1. Докажите, что со временем все числа станут больше миллиона.

### Капля камень точит

**Принцип Архимеда.** Складывая само с собой любое положительное число (даже очень малое), можно превзойти любое число (даже очень большое).

4. (a) Может ли сумма бесконечного числа положительных слагаемых быть конечным числом?  
(b) Докажите, что среди сумм вида  $1 + 1/2 + 1/3 + \dots + 1/n$  есть сколь угодно большие.
5. Два зеркала бесконечной длины образуют угол. Луч света падает на один из них. Докажите, что луч света отразится от зеркал конечное число раз (даже если угол очень маленький).
6. Трактор равномерно растягивает резиновый жгут длиной 10 м со скоростью 1 м/мин. По жгуту с одного конца ползет улитка со скоростью 1 см/мин. Может ли она со временем доползти до другого конца жгута?

### Сколько бы ни было — хочется еще

Следует различать «сколь угодно большое» и «бесконечное».

7. (a) Докажите, что есть сколь угодно длинная группа подряд идущих составных чисел.  
(b) Найдется ли бесконечная группа подряд идущих составных чисел?

8. (a) Продлим шахматную доску вправо и влево на миллион клеток. Король стоит на средней клетке нижней горизонтали. Может ли он обойти всю доску, побывав на каждой клетке ровно один раз?  
(b) Тот же вопрос, если доску продлили вправо и влево до бесконечности?

## Ковшом моря не вычерпаешь

Если покрыто целое, то покрыта его любая часть.

9. Можно ли покрыть прямую конечным числом кругов?
10. На плоскости отметили миллион точек, и через каждые две провели прямую. Докажите, что можно провести еще одну прямую так, чтобы угол между ней и любой ранее проведенной выражался нецелым числом градусов.
11. Полоса — это часть плоскости между двумя параллельными прямыми. Можно ли покрыть плоскость конечным числом полос?
12. Можно ли покрыть плоскость конечным числом внутренностей парабол?
- 

## Домашнее задание

1. (a) На отрезке длины 1 расположено бесконечно много отрезков длины 0,1. Докажите, что найдется отрезочек длины 0,01, лежащий внутри бесконечного числа отрезков.  
(b) В круге радиуса 1 расположено бесконечно много кругов радиуса 0,1. Докажите, что найдется кружок радиуса 0,01, содержащийся в бесконечном числе кругов.
2. Бесконечная во все стороны шахматная доска покрыта домино так, что каждое домино покрывает клетки. Может ли случиться, что каждая прямая, идущая по границам клеток, режет пополам  
(a) лишь конечное число домино;      (b) бесконечное число домино?
3. Докажите, что бесконечной последовательности попарно различных натуральных чисел, больших единицы, найдется бесконечное количество чисел, больших своего номера в этой последовательности.
4. Докажите, что из любых 11 бесконечных десятичных дробей можно выбрать две, совпадающие в бесконечном числе позиций.

## Дополнительные задачи

5. Верно ли, что среди сумм вида  $1 + 1/2^2 + 1/3^2 + \dots + 1/n^2$  есть сколь угодно большие?

6. Несколько прямых, никакие две из которых не параллельны, разрезают плоскость на части. Внутри одной из этих частей отметили точку  $A$ . Доказать, что точка, лежащая с  $A$  по разные стороны от всех данных прямых, существует тогда и только тогда, когда часть, содержащая  $A$ , неограничена.
7. Известно, что человечество бессмертно, а каждый человек смертен и имеет конечное число детей. Докажите, что найдется бесконечная мужская цепочка, начинающаяся с Адама.
8. С центрами в целых точках прямой расположены ямы, шириной  $0,01$  каждая. Длина прыжков блохи постоянна и равна  $\sqrt{2}$ . Докажите, что блоха рано или поздно попадет в яму. (Блоха начинает из произвольной точки.)

[www.ashap.info/Uroki/Mosbory](http://www.ashap.info/Uroki/Mosbory)