Переправы и инварианты

Сколь ни вдоль, а поперек изволь. *Поговорка*

Если объекты или ситуации задачи четко делятся на две категории (два берега, два цвета), и если путь начинается на одном берегу, а заканчивается на другом, то неизбежно придется переправляться.

1. Плоскость раскрашена в два цвета. Докажите, что есть точки разного цвета на расстоянии 1 мм.

2. Можно ли на всех полях шахматной доски расставить коней четырех мастей так, чтобы вороные не били соловых, соловые — гнедых, гнедые — кауръх, а каурые — вороных?

Вместо цветов используют значения какой-нибудь величины, например, остатки. Переправа может оказаться ключевым местом решения: надо только суметь привязать к ней вопрос задачи.

3. (a) Можно ли расставить в таблице 8×8 числа от 1 до 64 так, чтобы ни в какой паре клеток с общей стороной или вершиной сумма не делилась на 4?
(b) Можно ли расставить в таблице 8×8 различные двузначные числа так, чтобы ни в какой паре клеток с общей стороной или вершиной сумма не делилась на 3?

4. Натуральные числа раскрашены в синий и красный цвета, причем чисел каждого цвета бесконечно много. Докажите, что найдутся синяя и красная пара с одинаковыми суммами.

Типичная ситуация: есть набор позиций (состояний) и переходы между ними. Это можно рассматривать как граф. Пусть с каждой позицией можно связать некоторую величину. Если величина при переходах не меняется, она — инвариант. Значения инварианта разбивают граф на компоненты связности, и нет маршрута между позиций с разными значениями инварианта. Соответственно, можно доказывать невозможность действия: например, нельзя доехать на поезде от Нью-Йорка до Москвы, поскольку поезда из Америки ходят только в Америку. Но можно доказать и существование: если добраться таки удалось, то был либо перелет, либо плавание.

Типичные инварианты: четность, общий делитель, сумма.

5. В банке 1100 долларов. Разрешаются две операции: взять из банки 370 долларов или положить в нее 111 долларов. Эти операции можно проводить много раз, при этом, однако, никаких денег, кроме тех, что первоначально лежат в банке, нет. Какую максимальную сумму можно извлечь из банки и как это сделать?

6. Есть три кучки камней: в первой 51 камень, во второй — 49, а в третьей — 5. Разрешается объединять любые кучки в одну, а также разделять кучку, состоящую из четного количества камней, на две равные. Можно ли получить 105 кучек по одному камню?

7. Клетчатый квадрат 2015×2015 разрезали по границам клеток на прямоугольники (не обязательно одинаковые). Докажите, что найдется прямоугольник, чей периметр делится на 4.

Нечисловые инварианты чаще всего связаны с чередованием или с невозможностью уничтожить элемент с каким-то свойством.

8. Картонный треугольник катают по плоскости, перекатывая через сторону. После 2015 перекатываний он попал в точности на исходное место. Докажите, что треугольник равнобедренный.

9. Маляр-хамелеон ходит по клетчатой доске как обычная шахматная ладья. Попав в очередную клетку, он либо перекрашивается в ее цвет, либо перекрашивает клетку в свой цвет. Белого маляра-хамелеона кладут на черную доску размерами 8×8 клеток. Сможет ли он раскрасить ее в шахматном порядке?

Переправы и инварианты (домашнее задание)

1. Натуральные числа от 1 до 2015 покрашены в красный и синий цвета. Есть пара красных и пара синих чисел с одинаковыми произведениями. Докажите, что можно выбрать пару красных и пару синих чисел с одинаковыми суммами.

4a. Три ладьи стояли на клетках `a1`, `b1` и `a2`. За несколько ходов они перешли в клетки у противоположного угла доски: с `a1` — на `h8`, с `b1` — на `h7`, с `a2` — на `g8`. Докажите, что после какого-то из ходов какая-то из ладей не била других ладей.

2. По шахматной доске прокатили кубик. Он встал той же гранью на ту же клетку. Может ли кубик оказаться повернутым на 90° вокруг вертикальной оси?

3. *(Сдать письменно 2 или 3 апреля.)* Есть три одинаковых больших сосуда. В одном — 3 л сиропа, в другом — N л воды, третий — пустой. Можно выливать из одного сосуда всю жидкость в другой или в раковину. Можно выбрать два сосуда и доливать в один из них из третьего, пока уровни жидкости в выбранных сосудах не сравняются. При каких целых N можно получить 10 л разбавленного 30%-го сиропа?