Переправы и инварианты

Сколь ни вдоль, а поперек изволь. *Поговорка*

0. *Затравка.* Дан жесткий проволочный контур квадрата площади $1\,\text{дм}^2$. Его разрезали на части и спаяли заново. Получился контур плоского многоугольника.
(a) Резали на 3 части. Какова наибольшая возможная площадь нового многоугольника?
(b) Резали на 4 части. Могла ли получиться площадь не менее $105\,\text{см}^2$?

Если объекты или ситуации задачи четко делятся на две категории (два берега, два цвета), и если путь начинается на одном берегу, а заканчивается на другом, то неизбежно придется переправляться.

1. Плоскость раскрашена в два цвета. Докажите, что есть точки разного цвета на расстоянии $1\,\text{мм}$.

2. Можно ли на всех полях шахматной доски расставить коней четырех мастей так, чтобы вороные не били соловых, соловые — гнедых, гнедые — каурых, а каурые — вороных?

Вместо цветов используют значения какой-нибудь величины, например, остатки. Переправа может оказаться ключевым местом решения: надо только суметь привязать к ней вопрос задачи.

3. Можно ли расставить в таблице 8×8 числа от 1 до 64 так, чтобы ни в какой паре клеток с общей стороной или вершиной сумма не делилась (a) на 4; (b) на 3?

4. Натуральные числа раскрашены в синий и красный цвета, причем чисел каждого цвета бесконечно много. Докажите, что найдется бесконечно много чисел, представимых как сумма двух различных синих, так и как сумма двух различных краснах.

Типичная ситуация: есть набор позиций (состояний) и переходы между ними. Это можно рассматривать как граф. Пусть с каждой позицией можно связать некоторую величину. Если величина при переходах не меняется, она — инвариант. Значения инварианта разбивают граф на компоненты связности, и нет маршрута между позиций с разными значениями инварианта. Соответственно, можно доказывать невозможность действия: например, нельзя доехать на поезде от Нью-Йорка до Москвы, поскольку поезда из Америки ходят только в Америку. Но можно доказать и существование: если добраться таки удалось, то был либо перелет, либо плавание.

Типичные инварианты: четность, общий делитель, сумма.

5. В банке 1100 долларов. Разрешаются две операции: взять из банка 370 долларов или положить в него 111 долларов. Эти операции можно проводить много раз, при этом, однако, никаких денег, кроме тех, что первоначально лежат в банке, нет. Какую максимальную сумму можно извлечь из банка и как это сделать?

6. Есть три кучки камней: в первой 51 камень, во второй — 49, а в третьей — 5. Разрешается объединять любые кучки в одну, а также разделять кучку, состоящую из четного количества камней, на две равные. Можно ли получить 37 кучек камней?

Нечисловые инварианты чаще всего связаны с чередованием или с невозможностью уничтожить элемент с каким-то свойством.

7. Картонный треугольник катают по плоскости, перекатывая через сторону. После 2015 перекатываний он попал в точности на исходное место. Докажите, что треугольник равнобедренный.

8. Маляр-хамелеон ходит по клетчатой доске как обычная шахматная ладья. Попав в очередную клетку, он либо перекрашивается в ее цвет, либо перекрашивает клетку в свой цвет. Белого маляра-хамелеона кладут на черную доску размерами 8×8 клеток. Сможет ли он раскрасить ее в шахматном порядке?

9. Остроугольный треугольник разрезали прямолинейным разрезом на две (не обязательно треугольные) части, затем одну из этих частей — опять на две части, и так далее: на каждом шагу выбирали любую одну из уже имеющихся частей и разрезали ее (по прямой) на две. Через несколько шагов оказалось, что исходный треугольник распался на несколько треугольников. Могут ли все они быть тупоугольными?

Домашнее задание

1. Натуральные числа от 1 до 2015 покрашены в красный и синий цвета. Есть пара красных и пара синих чисел с одинаковыми произведениями. Докажите, что можно выбрать пару красных и пару синих чисел с одинаковыми суммами.

2. По шахматной доске прокатили кубик. Он встал той же гранью на ту же клетку. Может ли кубик оказаться повернутым на 90° вокруг вертикальной оси?

3. *(Сдать письменно 2 или 3 апреля.)* Есть три одинаковых больших сосуда. В одном — 3 л сиропа, в другом — N л воды, третий — пустой. Можно выливать из одного сосуда всю жидкость в другой или в раковину. Можно выбрать два сосуда и доливать в один из них из третьего, пока уровни жидкости в выбранных сосудах не сравняются. При каких целых N можно получить 10 л разбавленного 30%-го сиропа?

4. Известно, что среди членов некоторой арифметической прогрессии $a_1, a_2, a_3, \ldots$ есть числа a_1^2, a_2^2 и a_3^2. Докажите,что эта прогрессия состоит из целых чисел.

Дополнительные задачи

5. Дана пустая таблица размера 13×17. Двое по очереди ставят в нее фишки в ее пустые клетки. Первый может поставить фишку на пересечение строки и столбца, если в строке и столбце в сумме четное число фишек, второй — если нечетное. Игра заканчивается, когда ход невозможен. Докажите, что последний ход всегда делает один и тот же игрок. Кто именно?

6. Можно ли расставить в таблице 50×50 числа от 1 до 2500 так, чтобы ни в какой паре клеток с общей стороной или вершиной сумма не делилась на 4?

7. На главной диагонали квадрата 101×101 стоят пять ладей. Каждым ходом можно переставить одну из ладей в любом направлении по вертикали или горизонтали вплотную к ближайшей ладье или стенке квадрата (перепрыгивать через ладьи нельзя). Может ли в итоге одна ладья оказаться в центральной клетке квадрата, а остальные четыре — в клетках, соседних по стороне с центральной?

8. Ножки циркуля поставили в узлы бесконечной клетчатой решетки. За один ход можно передвинуть одну ножку в другой узел, не отрывая другой и не меняя раствора циркуля. Можно ли вернуться в исходные вершины, поменяв местами ножки?