

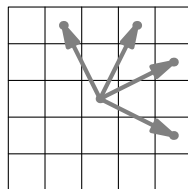
Полуинвариант

Пусть есть последовательность объектов, или процесс, в котором позиции последовательно сменяются. Полуинвариант — это связанное с позицией число, которое при разрешенных действиях все время растёт или все время убывает (возможно, нестрого). Выбор полуинварианта зависит от цели.

1. На Ахипелаге Сыщик гоняется за Шпионом. Оба используют только маршрутные корабли, которые курсируют ежедневно между некоторыми островами. Каждый корабль отплывает утром и приплывает на остров назначения к вечеру. С пересадками можно добраться с любого острова на любой. Сыщик всегда знает, где сейчас Шпион, и поймает его, если окажется с ним на одном острове. Сыщик может плыть в любой день, Шпион не плавает по пятницам. Как Сыщику поймать Шпиона?

Оценив изменение полуинварианта на одном шаге или на группе шагов, можно оценить, за сколько шагов процесс закончится.

2. (а) На шахматной доске 100×100 коню разрешено ходить только в четырех направлениях (рис. справа). Докажите, что с какой бы клетки он ни начал, ему удастся сделать лишь конечное число ходов.
(б) Какое наибольшее число ходов конь может сделать на этой доске?



Типичные полуинварианты: сумма, произведение, модуль разности, сумма модулей, сумма квадратов и их комбинации (например, суммы).

3. На доске написаны 100 натуральных чисел. За ход можно либо заменить два числа на их сумму, либо разложить число в произведение двух меньших различных чисел и заменить его на эти два числа. Докажите, что рано или поздно на доске останется одно число.
4. На доске написаны 3 различных натуральных числа. За ход можно взять одно из крайних чисел (наибольшее или наименьшее) и заменить на среднее арифметическое, геометрическое или гармоническое его с каким-то другим из чисел (при условии, что это среднее — натурально, и все числа остаются различными). Докажите, что удастся сделать лишь конечное число ходов.

Для строки целых чисел (или объектов) полуинвариантом может быть многозначное число в некоторой системе счисления.

5. В двух коробках лежат по 9 шариков. За один ход можно убрать из любой коробки 1 шарик или убрать 1 шарик из левой коробки и положить 9 шариков в правую.
 - (а) Докажите, что ходы рано или поздно закончатся.
 - (б) Какое наибольшее число ходов могло быть сделано?

6. (а) В строке записаны 100 цифр. Петя находит пару рядом стоящих цифр, где правая меньше левой, и меняет их местами. Докажите, что рано или поздно перестановки прекратятся.
- (б) В строку в беспорядке записаны по разу числа $1, 2, \dots, 100$. Петя находит пару рядом стоящих чисел, где правое меньше левого, и меняет их местами. Докажите, что рано или поздно числа расположатся по порядку $1, 2, \dots, 100$.

Если есть строгий полуинвариант, то позиция не может повториться (и, в частности, процесс не может заиклиться). В большинстве игр наличие полуинварианта гарантирует, что игра закончится.

7. Есть 10 различных чисел. За одну операцию можно два неравных числа заменить на два равных с той же суммой.
- (а) Может ли процесс продолжаться бесконечно?
- (б) Может ли один и тот же набор чисел возникнуть дважды?

Если полуинвариант может принимать лишь конечное число значений, или убывает, принимая лишь натуральные значения, то он достигнет «крайнего» значения. Это может обеспечить искомую позицию.

8. (а) В клетках таблицы 99×99 расставлены плюсы и минусы. Если в каком-то прямоугольнике из 99 клеток минусов больше чем плюсов, разрешается поменять в нем все знаки на противоположные. Докажите, что через некоторое время во всех таких прямоугольниках плюсов будет больше чем минусов.
- (б) В клетках таблицы 99×99 расставлены целые числа. Если в каком-то прямоугольнике из 99 клеток сумма отрицательна, разрешается поменять в нем знаки всех чисел на противоположные. Докажите, что через некоторое время сумма чисел в каждом из таких прямоугольников сумма будет неотрицательной.
- (с) Как в предыдущем пункте, но числа — действительные.

Домашнее задание

1. Есть 10 различных целых чисел (не обязательно положительных). За одну операцию можно два не равных числа одинаковой четности заменить на два равных с той же суммой. Может ли процесс продолжаться бесконечно?
2. Вначале на доске было написано натуральное число, меньшее 1000. Каждым ходом число увеличивали в q раз.
- (а) После каждого из первых 9 ходов получалось целое число. Верно ли, что и дальше будут получаться только целые числа?
- (б) То же, но целые числа получались после каждого из первых 10 ходов?
3. Аня, Боря и Витя сидят по кругу за столом и едят орехи. Сначала все орехи у Ани. Она делит их поровну между Борей и Витей, а остаток (если он есть) съедает. Затем все повторяется: каждый следующий (по часовой стрелке) де-

лит имеющиеся у него орехи поровну между соседями, а остаток съедает. В начале было больше 100 орехов. Докажите, что хотя бы один орех будет съеден.

4. В Стране Оз все города подняли над ратушами флаги — голубые либо золотистые. Каждый день жители узнают цвета флагов у соседей в радиусе 100 км. Один из городов, где у большинства соседей флаги другого цвета, меняет свой флаг на этот другой цвет. Докажите, что со временем смены цвета флагов прекратятся.

Дополнительная задача

5. На окружности сидят 12 кузнечиков в различных точках. Эти точки делят окружность на 12 дуг. По сигналу кузнечики одновременно прыгают по часовой стрелке, каждый — из конца своей дуги в ее середину. Образуются новые 12 дуг, прыжки повторяются, и т. д.
- (a) Все кузнечики одновременно вернулись в исходные точки, каждый в свою. Какое наименьшее число прыжков мог сделать каждый кузнечик?
- (b) Может ли хотя бы один кузнечик вернуться в свою исходную точку после того, как им сделано 12 прыжков?
- (c) Как в предыдущем пункте, но 13 прыжков?