

## Перевод на другой язык (изоморфизм)

How much is five plus seven?

Задача, переведенная на другой язык, может оказаться гораздо легче. Не забудьте только перевести решение обратно!

- (а) На пустой шахматной доске двое играющих по очереди двигают коня. Двигать можно только влево-вниз. Кто не сможет сделать ход — проиграл. Найдите все клетки, начав с которых первый может выиграть, как бы хорошо не играл противник.

(б) В двух коробочках лежат орехи, в каждой не более семи. Играют двое. За один ход нужно взять три ореха — два из одной коробочки, третий — из другой. Найдите все позиции, начав с которых первый может выиграть, как бы хорошо не играл противник.

Геометрические задачи можно перевести в алгебраические, введя координаты. Но с помощью координат можно и алгебраические задачи решать на геометрическом языке!

- Сколько решений может быть у системы уравнений при различных значениях параметров  $a, b, c, d, r, R$ ?
- По прямой в одном направлении на некоторых расстояниях (возможно, разных) друг от друга движутся 20 одинаковых шариков, а навстречу им движутся 20 других таких же шариков. Скорости всех шариков одинаковы. При столкновении любых двух шариков они разлетаются в противоположные стороны с той же скоростью, с какой двигались до столкновения. Сколько всего столкновений произойдет между шариками?

Переводят обычно на знакомый язык, где начинает работать интуиция!

- (а) Капитаны Боб и Иван состязаются в изготовлении и употреблении крепких напитков. Боб сделал коктейль из рома и портвейна, а Иван смешал водку с брагой. Известно, что ром крепче водки, а портвейн крепче браги. Наутро Ивану было много хуже. Он подозревает, что его смесь оказалась крепче коктейля Боба. Обоснованы ли подозрения? (Крепость — это процент алкоголя в смеси.)

(б) Имеется два дома, в каждом по два подъезда. Жильцы держат кошек и собак, причем доля кошек (отношение числа кошек к общему числу кошек и собак) в первом подъезде первого дома больше, чем доля кошек в первом подъезде второго дома, а доля кошек во втором подъезде первого дома больше, чем доля кошек во втором подъезде второго дома. Обязательно ли доля кошек в первом доме больше доли кошек во втором доме?

5. Следующая игра является переводом на другой язык одной очень популярной игры. Какой?

На столе лежат 9 карточек с числами от 1 до 9. Двое играющих по очереди берут по одной карточке. Выигрывает тот, кто первым после своего хода сможет выложить три карточки с суммой 15.

Переводят для того, чтобы обойти препятствие: так, туристы, идущие вдоль берега и натолкнувшиеся на скалы, могут обойти их, временно переправившись на другой берег.

6. (a) Из  $N$  прямоугольных плиток (возможно, неодинаковых) составлен прямоугольник, у которого одна сторона вдвое больше другой. Докажите, что можно разрезать каждую плитку на две части и части и разложить части каждой плитки в две разные кучки так, чтобы из всех частей каждой кучки можно было сложить квадрат. (b) Из  $N$  прямоугольных плиток (возможно, неодинаковых) составлен прямоугольник с неравными сторонами. Верно ли, что можно так разрезать каждую плитку на две части и разложить части каждой плитки в две разные кучки, чтобы из  $N$  частей одной кучки можно было сложить квадрат, а из  $N$  частей другой кучки — прямоугольник?
7. (a) На доске выписаны числа  $1, 1/2, 1/3, \dots, 1/99$ . За одну операцию пара выбранных чисел  $a$  и  $b$  заменяется на отношение их произведения к их сумме. После нескольких операций осталось одно число. Какое?  
(b) Тот же вопрос для чисел  $1, 2, 4, 8, \dots, 1024$ .  
(c) Тот же вопрос для чисел  $1 \cdot 2, 2 \cdot 3, 3 \cdot 4, \dots, n \cdot (n + 1)$ .
- 

## Домашнее задание

1. Докажите неравенство

$$\begin{aligned} \sqrt{(x_1 + x_2 + \dots + x_n)^2 + (y_1 + y_2 + \dots + y_n)^2} &\leq \\ &\leq \sqrt{x_1^2 + y_1^2} + \sqrt{x_2^2 + y_2^2} + \dots + \sqrt{x_n^2 + y_n^2}. \end{aligned}$$

2. На доске написаны в порядке возрастания два натуральных числа  $x$  и  $y$  ( $x \leq y$ ). Петя записывает на бумажке  $x^2$  (квадрат первого числа), а затем заменяет числа на доске числами  $x$  и  $y - x$ , записывая их в порядке возрастания. С новыми числами на доске он снова проделывает ту же операцию, и так далее, до тех пор, пока одно из чисел на доске не станет нулем. Чему будет в этот момент равна сумма чисел на Петинной бумажке?
3. На доске выписаны числа  $1, 1/2, 1/3, \dots, 1/99$ . За одну операцию пара выбранных чисел  $a$  и  $b$  заменяется на  $ab + b + a$ . После 98 операций осталось одно число. Какое?

4. В противоположных углах шахматной доски стоят белая и черная фишки. Ходят по очереди на соседнюю по стороне клетку, начинают белые. Белые стремятся получить прямоугольный треугольник с вершинами в центре доски и центрах клеток с фишками. Могут ли черные им помешать?

[www.ashap.info/Uroki/Mosbory](http://www.ashap.info/Uroki/Mosbory)