

Индукция

Математическая индукция помогает коротко записать строгое решение, но не объясняет, как его придумать, и в чем его смысл.

Индуктивное построение. Наиболее оправдано применение индукции при построении сложных конструкций, когда очередной этаж строится на основе уже построенных нижних этажей. Такое построение может быть при необходимости преобразовано в явный алгоритм.

1. В компании из n человек ($n > 3$) каждый узнал по новости. Созвонившись, двое рассказывают друг другу все известные им новости. Как за $2n-4$ звонка все смогут узнать все новости?

Целься сверху. Если конструкция для $n+1$ не единственна, то связь с конструкцией для n надо осуществлять «спуском из $n+1$ », а не «подъемом из n ». В частности, надо убедиться, что всякая конструкция для $n+1$ получается из конструкции для n .

Пример. Если в графе число ребер не меньше числа вершин, то в нем есть цикл.

2. На клетчатой бумаге нарисован многоугольник площади n со сторонами на линиях сетки. Докажите, что его периметр не превосходит $2n+2$.

Доказывай больше

Для шага индукции может потребоваться больше свойств, чем мы хотим доказать. Нередко эти дополнительные свойства доказывают тоже по индукции, расширив на них доказываемое утверждение. Например, вместо неравенства $1/1 \cdot 2 + 1/2 \cdot 3 + \dots + 1/(n-1)n < 1$ легче доказывать равенство $1/1 \cdot 2 + 1/2 \cdot 3 + \dots + 1/(n-1)n = 1 - 1/n$.

3. Дан равносторонний треугольник со сторонами длины 1. За один ход можно увеличить одну из сторон треугольника, но так, чтобы он остался треугольником. Докажите, что после n ходов наибольшая сторона будет меньше $(n+2)$ -го члена ряда Фибоначчи 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, ...

Рекурсия

Редукция сводит решение задачи к более простой. Пусть удастся свести к такой же задаче с меньшим значением полуинварианта. Если полуинвариант не может уменьшаться бесконечно, а для его крайних значений задача решена, то это – *рекурсия*. Такую *цепочку редукций* тоже оформляют как индукцию, объявляя полуинвариант параметром индукции.

Пример. Сумма углов в невыпуклом n -угольнике равна $180^\circ(n-2)$.

4. В городе 100 домов. Какое наибольшее число замкнутых непересекающихся заборов можно построить так, чтобы любые два забора ограничивали разные группы домов?

5. Докажите, что любая правильная дробь может быть представлена в виде (конечной) суммы попарно различных дробей с числителем 1 и натуральным знаменателем.

Индукция незаменима при логической рекурсии

Он думал, что я думала, что думал он я сплю

6. Двум логикам сообщили на ухо два натуральных числа, а вслух сообщили, что числа отличаются на 1. Далее их по очереди много раз спрашивают, знают ли они число другого, и те вслух говорят «Да» или «Нет». Докажите, что рано или поздно кто-то скажет «Да».

7. 10 бандитов ограбили банк на миллион долларов и уселись в ряд за стол делить деньги. Сначала первый предлагает, кому сколько: мне столько-то, второму столько-то и т.д., и все 10 голосуют. Если «за» не менее половины, то предложение принимается, каждый получает предложенную долю, и все расходятся. Если более половины голосуют «против», первого убивают, и тогда уже второй бандит предлагает кому сколько на тех же условиях, и т.д.

Каждый бандит руководствуется в первую очередь желанием выжить, во вторую (если жизнь вне опасности) – получить побольше денег, в третью (если на жизнь и сумму это не влияет) – не убивать без необходимости (дело-то не последнее!). Как распределятся деньги, если все бандиты будут действовать и рассуждать абсолютно логически?

Индукция. Для самостоятельного решения

И1. В классе каждый болтун дружит хотя бы с одним молчуном. При этом болтун молчит, если в кабинете находится нечетное число его друзей-молчунов. Докажите, что учитель может пригласить на факультатив не менее половины класса так, чтобы все болтуны молчали.

И2. Есть гири с номерами от 1 до n , для каждого k вес k -й гирьки целый и не превосходит k . Общий вес гирь чётен. Докажите, что все гири можно разбить на две кучки равного веса.

И3. Отряд девочек отправился в поход. После того, как они вернулись, их родителям стало известно, что хотя бы одна из них искупалась в походе без разрешения, и каждый решил высечь свою дочь, если узнает о том, что она купалась. Каждое утро девочки ходят в школу и обмениваются слухами о том, кто искупался в походе и кого высекли родители, которые сообщают вечером родителям (исключая информацию о том, купались ли они сами). Через 13 дней несколько отцов, получив очередную порцию информацию, догадались о провинности их дочерей и высекли их. Сколько детей получило в этот вечер наказание?

И4'. Докажите, что в выпуклом n -угольнике нельзя выбрать больше n диагоналей так, чтобы любые две из них имели общую точку (общая точка может быть и концом диагонали).

И5. Можно ли отметить на плоскости несколько точек так, чтобы на расстоянии 1 от каждой отмеченной точки находилось ровно 10 отмеченных?

И6. На доске написаны 11 чисел: 1, 2, 4, 8, 16, 32, 64, 128, 256, 512, 1024. За ход разрешено стереть любые два и записать вместо них модуль их разности. Докажите, что ровно за 10 ходов можно получить на доске любое нечетное число от 1 до 1023.

Московские сборы, 9.2 класс, А.Шаповалов. 11 апреля 2013 г.