

## Площади и периметры клетчатых прямоугольников

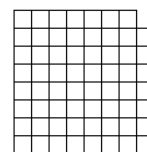
Здесь мы рассматриваем только прямоугольники на клетчатой бумаге, у которых границы идут по линиям сетки. Все разрезы тоже должны идти по линиям сетки. Сторона одной клетки равна 1, поэтому площадь прямоугольника равна числу клеток в нём. Прямоугольники *равны*, если оба их размера совпадают (2х5 равен 5х2). Прямоугольники одинаковой площади называются *равновеликими* (2х5 и 1х10 – равновелики, но не равны).

1. а) Сколько есть разных (не равных друг другу) прямоугольников с периметром 20?
- б) Сколько есть разных прямоугольников с площадью 20?
- в) Каким может быть периметр клетчатого прямоугольника? (Найдите все значения)
- г) Для каких значений периметра  $P$  прямоугольник единственный (т. е. все прямоугольники с данным периметром равны друг другу)?
- д) Для каких значений площади  $S$  прямоугольник единственный?

**Обсуждение.** Площадь  $S=ab$ , периметр  $P=2(a+b)$ . Удобнее работать с полупериметром  $P/2=a+b$ .

2. Можно ли квадрат 8х8 без одной угловой клетки (см. рис.) разрезать

- а) на 9 равновеликих прямоугольников?
- б) на 8 равновеликих прямоугольников?
- в) на 7 равновеликих прямоугольников?



**Обсуждение.** Число клеток – это площадь фигуры. Равновеликие фигуры не обязательно равны! Как связаны площадь целого и сумма площадей частей? Они равны! Подсчеты площадей помогают при разрезании, позволяют использовать делимость и предсказывать возможную форму частей.

- 3.а) Квадрат 6х6 разрезали на 9 равновеликих прямоугольников. Обязательно ли все прямоугольники равны?
- б) А при разрезании на 12 равновеликих прямоугольников?

**Обсуждение.** Равновеликость в общем случае не означает равенства, но для клетчатых прямоугольников с данной площадью вариантов мало, иногда вариант единственный.

- 4.а) Разрежьте квадрат 6х6 на 10 прямоугольников с равными периметрами.
- б) Чему может быть периметр частей?
- в) Каковы размеры частей и сколько может быть частей каждого размера?

**Обсуждение.** Равен ли периметр целого сумме периметров частей?

**Теорема.** Если у двух прямоугольников равны площади и равны периметры, то прямоугольники равны.

## Зачётные задачи

В ПП1 и ПП2 достаточно ответа. В остальных вместе с ответом нужно ещё рассуждение.

**ПП1.** Разрежьте квадрат 4х4 по границам клеток на нечётное число прямоугольников одинакового периметра.

**ПП2.** Клетчатый квадрат 6х6 без угловой клетки разрезали на равновеликие не квадратные прямоугольники. Сколько прямоугольников могло получиться? (Найдите все ответы)

**ПП3.а)** Квадрат 10х10 разрезали на 10 прямоугольников с одинаковыми периметрами. Обязательно ли среди частей есть не равные?

б) А если этот квадрат разрезали на 9 прямоугольников с одинаковыми периметрами?

в) Приведите пример разрезания этого квадрата на 9 прямоугольников с одинаковыми периметрами.

**ПП4. а)** Можно ли разрезать квадрат  $8 \times 8$  на 21 прямоугольник одинакового периметра?  
**б)** А на 22 прямоугольника?

**ПП5.** Квадрат  $8 \times 8$  разрезан на прямоугольники периметра 10.

**а)** Обязательно ли все прямоугольники равны?

**б)** Обязательно ли число прямоугольников двузначно?

**ПП6\*.** Клетчатый прямоугольник  $11 \times 35$  разрезали по границам клеток на два меньших прямоугольника. Периметр одной части в целое число раз меньше периметра другой. Найдите размеры большего из прямоугольников.

**ПП7\*.** Можно ли клетчатый квадрат  $10 \times 10$  разрезать по границам клеток на пять прямоугольников так, чтобы ни из каких двух частей нельзя было сложить прямоугольник?