

## РАССТАВЬ ЦИФРЫ

Задачи на расстановку цифр в клетки, вершины или числители и знаменатели дробей – это почти ребусы. Как и в ребусах, при переборе работают ограничения в виде неравенств. Но тут больше математики, связанной с делимостью.

1. Имеется 9 карточек с цифрами 1, ..., 9. Из части карточек Луиза сложила два числа с суммой 100, при этом *одно число делится на другое*. Какую цифру Луиза точно использовала?

**Вопрос.** Какое ещё число кратно меньшему из слагаемых?

На какие цифры не могут заканчиваться слагаемые?

**Совет.** Цифры одновременно являются и маленькими числами. Часто используют *делимость на цифры и перебор делителей*.

2. Найдите 4 цифры такие, что сумма двух чётных вдвое больше суммы двух нечётных, а сумма двух кратных 3 втрое больше суммы двух не кратных 3.

**Вопрос.** Может ли пара чисел, кратных 3, совпасть с парой чётных чисел? А с парой нечётных?

Какова наибольшая возможная сумма чётных? А нечётных?

**Совет.** Цифры – числа небольшие, неравенства помогают найти узкие места и заметно сократить перебор.

3. а) Разбейте 111 на два слагаемых с одинаковыми суммами цифр.

б) Всякое ли трёхзначное число можно разбить на два слагаемых с одинаковыми суммами цифр?

**Вопрос.** Будет ли при сложении переход через десяток? Почему?

В каком разряде может быть переход через десяток? Чему равна сумма цифр слагаемых в этом разряде?

**Лемма.** Обозначим  $s(x)$  – сумму цифр числа  $x$ . Если  $N = a+b+c+\dots$ , то  $s(N) = s(a)+s(b)+s(c)+\dots - 9k$ , где  $k$  – число единиц, перенесённых в старшие разряды.

**Следствие.**  $s(N)$  и  $s(a)+s(b)+s(c)+\dots$  дают одинаковый остаток при делении на 9.

4. Можно ли в равенство  $*/* + */* = */*$  вместо звёздочек вписать шесть последовательных цифр (в некотором порядке) так, чтобы все дроби были несократимыми, а равенство верным?

**Вопрос.** Приведём к общему знаменателю равенство  $*/2 + */4 = */5$ . Что можно сказать о числителях в левой и правой частях?

Тот же вопрос для равенства  $*/2 + */5 = */4$ . А для равенства  $*/3 + */6 = */9$ ?

Какие цифры должны быть в знаменателях, чтобы равенство было возможно?

**Совет.** В ребусах со сложением и вычитанием несократимых дробей узкое место – делимость знаменателей.

**Лемма.** Пусть несократимая дробь равна сумме или разности нескольких несократимых дробей.

а) Если какой то знаменатель кратен простому  $p$ , то найдётся ещё хотя бы один знаменатель, кратный  $p$ .

б) Если какой то знаменатель кратен степени простого числа  $p^k$ , то найдётся ещё хотя бы один знаменатель, кратный  $p^k$ .

### Зачётные задачи

РЦ1. Имеется 10 карточек с цифрами 0, 1, ..., 9. Из пяти карточек Юра сложил два числа с суммой 144, при этом *одно число делится на другое*. Какая это могла быть пара чисел? Найдите все ответы.

РЦ2. Какое наименьшее целое может получиться в результате деления ДЕЛ:И ?

РЦ3. Найдите шестизначное число, у которого первая цифра в 6 раз меньше суммы всех цифр справа от неё и вторая цифра в 6 раз меньше суммы всех цифр справа от неё.

РЦ4. а) Впишите в каждый кружочек по цифре, отличной от нуля, так, чтобы сумма цифр в двух верхних кружочках была в 7 раз меньше суммы остальных цифр, а сумма цифр в двух левых кружочках была в 5 раз меньше суммы остальных цифр.



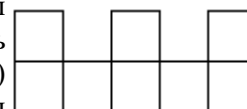
б\*) Докажите, что задача имеет единственное решение.

РЦ5. Каждое ли четырёхзначное число меньше 3333 можно представить как сумму двух натуральных слагаемых с одинаковыми суммами цифр?

$$И + 3 = \frac{Д}{Б} + \frac{Р}{Е} + \frac{О}{Й}$$

РЦ6. Есть ли решение у ребуса такое, что все цифры не равны 0, все дроби — несократимы, и в обеих частях слагаемые идут по возрастанию?

РЦ7. а) Можно ли так расставить в клетках фигуры числа от 1, 2, ..., 8, чтобы при любом разрезании фигуры на две части сумма в одной из частей делилась на сумму в другой? (Резать можно только по границам клеток.)



б) Можно ли так расставить в клетках полоски  $1 \times 8$  числа от 1, 2, ..., 8, чтобы при любом разрезании полоски на две части сумма в одной из частей делилась

на сумму в другой? (Резать можно только по границам клеток.)  
**в)** Можно ли расставить 8 разных цифр в клетках полоски  $1 \times 8$  так, чтобы при любом разрезании полоски на две части сумма в одной из частей делилась на сумму в другой?

**РЦ8.** Желая получше изучить цифры, маленький Даня вырвал из книжки несколько листов. На них в номерах страниц каждая из 10 цифр встретилась ровно по одному разу. Сколько листов вырвал Даня? Страницы в книге пронумерованы по порядку, начиная с 1. На каждом листе два номера страниц: с одной стороны нечётный, с другой – больший на 1 чётный.

Онлайн-кружок 6 класса, 8 мая 2026 г, <http://www.ashap.info/Uroki/Mmoln/2025-26/index.html>