Разбиение графа на циклы и цепи

1. В графе есть 6 вершин степени 1 и 6 вершин степени 2, а других вершин нет.
а) Нарисуйте пример такого графа.
б) Может ли в таком графе быть 4 компоненты связности?
в) Может ли в таком графе быть 5 компонент связности?
Вопросы. Какие степени вершин могут быть в компонентах?
Как может выглядеть компонента с 3 вершинами, где все вершины степени 2?
А компонента с 3 вершинами, где есть степень 1?

Определение. Граф n-угольника (вершины – вершины, стороны – рёбра) называется *циклом* и обозначается C_n. В цикле все вершины степени 2. Минимальный цикл − треугольник.
Граф вида 0 – 0 – … – 0 – 0 называется *цепь и обозначается* P_n.(n − число вершин). В цепи две крайние вершины степени 1, остальные − степени 2. Минимальная цепь 0 – 0 состоит из ребра и его концов.

Теорема (о степенях 1 и 2).
А. Если в (конечном) графе все вершины – степени 2, то его компоненты связности – циклы.
Б. Если в (конечном) графе степени всех вершин равны 1 или 2, то его компоненты связности – циклы и цепи.

2. В графе 11 вершин, степень каждой равна 1 или 2.
а) Каково наибольшее число компонент связности в таком графе?
б) Какое наибольшее число компонент связности может быть циклами?
в) Какое наибольшее число компонент связности может быть циклами, если граф − двудольный?
Вопросы. **а)** Каково наименьшее число вершин в цикле или цепи?
б) Каково наименьшее число вершин в цикле?
в) Каково наименьшее число вершин в двудольном цикле?
Совет. Все цепи двудольны, а циклы – только чётные.

3. а) В двудольном графе степени всех вершин равны 2. Докажите, что можно раскрасить все рёбра в красный и синий цвета так, чтобы из каждой вершины выходили два ребра разного цвета.
б) В классе каждый мальчик дружит ровно с двумя девочками, а каждая девочка − ровно с двумя мальчиками. Докажите, что можно их всех разбить на пары «мальчик-девочка» так, чтобы в каждой паре были друзья.
Вопросы. **а)** Какой граф заведомо можно раскрасить таким образом?
б) Как раскраска вида (а) может помочь распределить учеников в пары?
Совет. Раскраска − удобное средство распределения на группы.

4. а) В графе степень каждой вершины не менее 2. Докажите, что в нём можно выделить замкнутый путь по рёбрам, на котором вершины и рёбра не повторяются (это называется *простой цикл)*.
б) В графе степень каждой вершины чётна. Докажите, что все ребра можно разбить на простые циклы (один или несколько).
в) В связном графе степень каждой вершины чётна. Докажите, что в графе есть цикл (возможно, не простой), проходящий по всем рёбрам ровно по разу (это *эйлеров цикл*).
г) В связном графе степени двух вершин нечётны, а остальных − чётны. Докажите, что в графе есть путь, проходящий по всем рёбрам ровно по разу с концами в вершинах нечётной степени (это *эйлеров путь*), и концы этого пути − обязательно вершины нечётной степени.
Вопросы. **а)** Что может помешать прогуляться по кругу без повторений?
б) Какие свойства будут у графа с выброшенным простым циклом?
в) Как можно объединить два простых цикла в один не простой?
г) Как можно граф с двумя вершинами нечётной степени превратить в граф, где все степени чётны?
Совет. Доказательство фактически показывает, как конструировать простые циклы, а также эйлеровы циклы и пути.

Зачётные задачи

ЦЦ1. а) В графе 12 вершин, степень каждой равна 2. Каково наибольшее число компонент связности в таком графе?
б) А если ещё известно, что граф двудольный?

ЦЦ2. Вершины графа пронумерованы числами от 1 до 10, а ребра соединяют пары вершин, чья сумма номеров кратна 5.
а) Сколько компонет связности у этого графа?
б) Сколько среди них циклов и сколько цепей?

ЦЦ3. В графе две вершины степени 0, две вершины степени 1 и две вершины степени 2, а других вершин нет. Сколько в нём компонент связности?

ЦЦ4. В полном графе с 7 вершинами каждая пара вершин связана ребром. Можно ли все рёбра покрасить
а) в 3 цвета так, чтобы рёбра каждого цвета образовали простой цикл длины 7?
б) в 7 цветов так, чтобы рёбра каждого цвета образовали простой цикл длины 3?

ЦЦ5. а) По кругу растут 12 кувшинок. Лягушка может прыгать через 3 пустые кувшинки на 4-ю. Считаем кувшинки вершинами графа, а прыжки – ребрами. Сколько компонент связности в этом графе?
б) А если кувшинок 9?
в) А если кувшинок 10?

ЦЦ6. В графе 33 вершины, степень каждой равна 1 или 2.
а) Каково наименьшее число рёбер в таком графе?
б) Каково наибольшее число рёбер в таком графе, если он − двудольный?

ЦЦ7. В однокруговом шахматном турнире каждый с каждым сыграл по разу и набрал в итоге целое число очков. Петя сыграл вничью с Васей. Докажите, что можно посадить за круглый стол не менее троих участников так, чтобы каждый сыграл вничью с обоими соседями. (В шахматах за победу дают 1 очко, за ничью − половину очка, за поражение − 0.)

ЦЦ8*. В классе 30 учеников, у каждого ровно по 2 друга. Требуется организовать дежурства по двое друзей так, чтобы никто не дежурил дважды.
а) Всегда ли можно организовать 11 таких дежурств?
б) Докажите, что как бы ни были устроены дружбы, можно организовать не менее 10 таких дежурств.

ЦЦ9*. Имеется 20 бусинок десяти цветов, по две бусинки каждого цвета. Их как-то разложили в 10 коробок, по 2 бусинки в каждую коробку. Докажите, что можно выбрать по одной бусинке из каждой коробки так, что все выбранные будут разного цвета.

ЦЦ10*. На шахматной доске стоят N ладей. Каждая ладья бьёт ровно две других. Обязательно ли можно убрать с доски одну ладью так, что по-прежнему каждая ладья будет бить ровно две других ладьи, если
а) N=9; **б)** N=10?
(Ладьи бьют друг друга, если они стоят на одной вертикали или горизонтали и между ними нет других ладей).