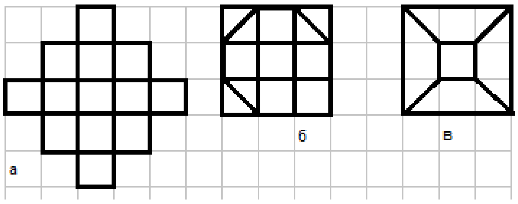
Эйлеровы пути и циклы

1. Какие из данных фигур можно нарисовать, не отрывая карандаша от бумаги и не проводя никакую линию дважды? (Такие фигуры называют *уникурсальными*).



Вопрос. Можно ли нарисовать фигуру, оторвав карандаш от бумаги всего один раз? Можно ли два пути объединить в один, если пути соприкасаются или пересекаются? А если один из этих путей замкнут?
Совет. «Отщепите» от фигуры один или несколько замкнутых путей («кругов») и обойдите остальное («малый путь»). Полный обход легко собирается добавлением к малому пути кругов по мере соприкосновения с ними.

Определение. Путь, проходящий по каждому *ребру* графа ровно один раз, называется *эйлеровым*. Замкнутый эйлеров путь называется *эйлеровым циклом*.

Лемма (о степенях). а) Пусть в графе есть незамкнутый эйлеров путь. Тогда степени двух концов этого пути нечётны, а степени всех остальных вершин чётны.
б) Пусть в графе есть эйлеров цикл. Тогда степени всех вершин чётны.

Замечание. Формулировка теоремы похожа на лемму о рукопожатиях. Не путайтесь:
А) если вершин нечётной степени нечётное число, то так *не бывает,*
Б) а если вершин нечётной степени чётное число большее 2: бывает, но в таких графах всего лишь *нет эйлерова пути*.

Совет. Чтобы найти эйлеров путь в графе с двумя нечётными вершинами, мы *обязаны* начать в одной из них, а закончить в другой.

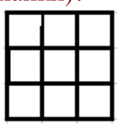
Теорема (критерий эйлеровости графа). а) Ровно две вершины *связного* графа – нечётной степени <=> в графе есть незамкнутый эйлеров путь.
б) Все вершины *связного* графа – чётной степени <=> в графе есть эйлеров цикл.

Совет. На практике эйлеров цикл ищут так: разбивают все ребра на несколько циклов, а затем шаг за шагом сливают два цикла в один как в решении упр.2, пока не получится один единственный цикл.

2. Муравей ползает по рёбрам куба, поворачивая только в вершинах.
а) Может ли он проползти по каждому *ребру* ровно один раз?
б) Может ли он побывать в каждой *вершине* ровно один раз?
Вопрос. Где мы видели граф с такими же степенями вершин?

3. У Вани есть отрезок проволоки длиной 12 дм. Он хочет сделать из неё каркас куба со стороной 1 дм. Для этого ему придётся разрезать проволоку на несколько частей, согнуть их, а затем спаять части. На какое наименьшее число кусков придётся резать?
Вопросы. Какие точки кусков придётся припаять? Какие точки на кубе будут точками склейки (спайки)?

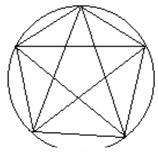
4. Муравей бегает по сторонам сетки 3x3, которая разбивает большой квадрат на квадратики со стороной 1 м. Он должен пробежать по каждой стороне хотя бы один раз. Какой наименьший путь он должен проделать?



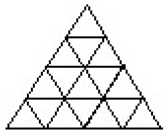
Вопрос. Что мешает муравью пробежать по каждой стороне ровно по разу?
Сколько всего «неправильных», мешающих вершин?
Как добавление «дважды пройденных» сторон меняет степени вершин?
Совет. Кратчайший путь по ребрам не эйлерова графа получается за счет превращения его в эйлеров минимальным добавлением рёбер.

5. а) Код двери подъезда состоит из двух цифр, их можно нажать в любом порядке. Натан код забыл, помнит лишь, что обе цифры нечётные и разные. Какое наименьшее число нажатий должен сделать Натан, чтобы наверняка открыть дверь?
б) То же, но Натан не уверен, что цифры разные?
Вопрос. Сколько есть пар разных нечётных цифр? А сколько есть пар соседних цифр в последовательности из N цифр?
Совет. Построение экономной цепочки символов, содержащей все нужные коды, сводится к построению экономного пути или цикла в подходящем графе.

Зачётные задачи

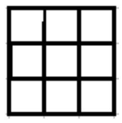


ЭП1. а) На окружности отметили 4 точки, каждые две точки соединили отрезком. Уникурсальна ли полученная фигура? (Рисовать нужно и дуги окружности, и отрезки).
б) На окружности отметили 5 точек, каждые две точки соединили отрезком (см. рис). Уникурсальна ли полученная фигура?

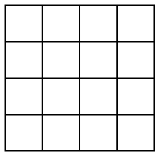


ЭП2. а) На рисунке – схема треугольного парка. Линии обозначают дорожки, в том числе идущие по контуру парка. Можно ли прогуляться по всем дорожкам, пройдя каждую ровно один раз?
б) На рисунке – схема треугольного замка, разбитого на треугольные залы. В каждой из внутренних стен замка сделана дверь. Можно ли прогуляться по замку, пройдя ровно по разу через каждую внутреннюю дверь (не запрещается проходить через комнату можно несколько раз)?

ЭП3. Жук ползает по рёбрам куба со стороной 1 дм. Он должен проползти по каждому ребру хотя бы один раз (но может и несколько раз, если надо). Какой наименьший путь должен проделать жук?



ЭП4. Жук ползает по сторонам сетки 3х3, которая разбивает большой квадрат на квадратики со стороной 1 м. Повернуть в обратную сторону он не может. По каждой стороне клетки жук может пройти не более одного раза. Какой наибольший путь может проделать жук?



ЭП5. Кусок прямой проволоки длиной 40 разрезали на части, части изогнули и спаяли из них сетку 4×4 (см. рис). Могли ли это быть
а) восемь частей длиной 5; **б)** пять частей длиной 8?

ЭП6. а) Проведите на сетке 4х4 (см. рис. в задаче ЭП5) несколько диагоналей клеток так, чтобы получилась уникурсальная фигура.
б*) Какое наименьшее число диагоналей для этого надо нарисовать?

ЭП7. а) На кодовом замке 10 кнопок с разными цифрами. Код состоит из двух разных цифр. Герман помнит, что сумма этих цифр *чётна, и их можно набрать в любом* порядке (например, если открывает 26, то открывает и 62). За какое наименьшее число нажатий Герман может наверняка открыть замок?
б) На кодовом замке 8 кнопок с цифрами от 1 до 8. Код состоит из двух цифр. Платон помнит, что сумма этих цифр *нечётна*, и их нужно набрать *в определённом порядке* (например, если открывает 25, то 52 не открывает). За какое наименьшее число нажатий Платон может наверняка открыть замок?

ЭП8. Из комплекта домино (28 костей 0-0, 0-1, …, 6-6) потеряли кости 2-5 и 4-5, а остальные по правилам домино сложили в цепочку. Сколько всего точек может быть на двух половинках костей на концах цепочки? (Правила разрешают приставлять кости друг к другу только одинаковыми половинками).

ЭП9*. Двоим патрульным с одним самокатом поручено прочесать 8 дорог, длины которых (в км) обозначены на схеме (см. рис). По каждому участку достаточно пройти или проехать одному патрульному. Патрульный покрывает за мин 100 м пешком или 200 м на самокате. Они могут стартовать из разных точек, и договорились, что каждый часть участков прочешет пешком, а часть — на самокате, передав его при встрече. За какое наименьшее время они могут выполнить задание?

ЭП10*. В стране из каждого города выходит ровно по 12 дорог. Каждая дорога соединяет два города, и из любого города можно доехать по дорогам до любого другого, возможно через другие города. Группу из трёх дорог из одного города назовём *развилкой.* Докажите, что все дороги можно разбить на *развилки*.