

## Инвариант шаг за шагом

1. Дети гуляют с орехами в карманах. У каждого в левом кармане орехов осталось вдвое больше, чем в правом. Может ли у всех вместе быть ровно

а) 75 орехов? б) 100 орехов?

**Вопросы.** Что можно сказать о числе орехов каждого? А об общем числе орехов?

**Совет.** Если целое составлено из частей, то на него переносятся такие свойства частей как чётность и делимость.

2. Каждым ходом компьютер увеличивает число на экране. Если сумма цифр числа делится на 4, он увеличивает число на сумму цифр, а если не делится, то увеличивает на 10. Вначале на экране было число 13. Может ли получиться число а) 55? б) 444?

**Вопрос.** Можно ли однозначно найти первые 10 чисел компьютера? Какое у них общее свойство? Будет ли это же свойство у всех последующих чисел?

**Совет. 1.** У всех результатов, которые мы получаем шаг за шагом (это могут быть числа, позиции, раскрашенные доски, конструкции) может быть некоторое неизменное свойство (*инвариант*). Достаточно доказать, что оно *не меняется при каждом шаге*. Это сразу доказывает, что *позиции без такого свойства не получаются*.

2. Даже, когда шаги однозначны, но их много, всю цепочку выписывать явно не стоит. Лучше вывести из инварианта невозможность или свойства окончательного результата.

Чаще процесс *ветвится*: на каждом шаге есть выбор. Здесь значение инварианта одинаково для начальной точки процесса и для всех точек, до которых можно дойти указанными шагами. А вот до точек с *другим значением инварианта* дойти нельзя.

3. Клетчатая доска 4x4 шахматно раскрашена. За ход можно в любом прямоугольнике из клеток двух цветов перекрасить все клетки в противоположный цвет.

а) Можно ли такими ходами всю доску сделать белой?

б) Можно ли оставить чёрными ровно 2 клетки?

**Вопрос.** Как можно изменить число белых клеток? Можно ли избавиться от черных клеток?

**Совет.** Инвариантом может быть что-то, от чего нельзя избавиться. Здесь это черный цвет, точнее – двуцветность.

Движение к результату может быть постепенным: мы уменьшаем число чёрных клеток каждым шагом.

4. а) Клетчатая доска 8x8 шахматно раскрашена. За ход можно в любом прямоугольнике из 4 или 6 клеток перекрасить все клетки в противоположный цвет. Можно ли такими ходами всю доску сделать белой?

б) Тот же вопрос для раскрашенной в шахматном порядке доски 7x7, где вначале угловые клетки – черные.

**Вопрос.** Можно ли избавиться от чёрных клеток в *части* доски, не меняя раскраски вне этой части?

Как меняется число чёрных клеток за один ход? Что служит инвариантом?

**Совет.** При раскрасках следят за количеством, разностью или четностью клеток того или иного цвета. Если раскраски нет, можно раскрасить самому.

5. Есть три кучки камней: 51 камень – в первой, 12 – во второй, 9 – в третьей. Разрешается за ход объединить любые кучки в одну или разделить кучку из четного числа камней на две равные. Какое наибольшее количество кучек можно получить?

**Вопрос.** Какое свойство кучек является инвариантом? Как это влияет на размер и количество кучек?

## Зачётные задачи

**ИШ1.** Банкомат меняет одну монету на шесть других. Может ли Юра с его помощью разменять одну монету а) на 66 монет? б) А на 100 монет?

**ИШ2.** Семеро козлят встали в ряд в порядке АБВГДЕЖ и играют в чехарду: каждую минуту двое из них, стоящие через одного, могут, прыгнув, поменяться местами. Могли ли они закончить игру, стоя в таком порядке: а) ЖЕДГВБА? б) ВГДЕЖАБ?

**ИШ3.** На доске записаны числа 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10. За ход разрешается стереть два числа и записать их разность (число  $\geq 0$ ). Может ли на доске после 9 ходов оказаться

а) число 5? б) число 2?

**ИШ4.** На экране компьютера число 202626. Каждую секунду робот уменьшает его на его сумму цифр. Он закончит, когда получит однозначное число. На каких числах робот может закончить?

**ИШ5.** В ряд лежат 6 карточек с числами 1, 2, 3, 4, 5, 6.

**а)** За ход разрешается поменять местами две соседние карточки. За какое наименьшее число ходов карточки могут расположиться в обратном порядке?

**б)** За ход разрешается поменять местами две соседние карточки, если их произведение не кратно 9. Можно ли расположить все карточки в обратном порядке?

**ИШ6. а)** 6 детей из 6-го класса стоят по кругу, и на каждом из них сидит комар. Время от времени какие-то 2 комара перелетают на соседнего ребенка – один по часовой стрелке, а другой – против. Могут ли все комары собраться на одном несчастном?

**б)** Тот же вопрос для 8 учеников 8 класса.

**ИШ7.** Изначально на доске написан набор чисел 20, 30, 40, 50. За ход разрешается выбрать любое число, уменьшить его в простое число раз (но так, чтобы оно осталось целым), а одно из других чисел увеличить в другое простое число раз (например, 50 и 20 заменить на  $50:5=10$  и  $20\cdot 7=140$ ). Можно ли такими ходами получить

**а)** набор 30, 40, 50, 60? **б)** набор 50, 70, 90, 110?

**ИШ8\*.** Есть три кучки сушек: 51 сушка – в первой, 49 – во второй, 5 – в третьей.

Разрешается объединять любые кучки в одну, а также разделять кучку, состоящую из чётного числа сушек, на две равные. Можно ли получить больше 40 кучек?

**ИШ9\*.** У алхимика есть 13 алмазов, 15 рубинов и 17 изумрудов. Он изобрел аппарат, который за один оборот превращает пару разных камней в пару отличающихся от них одинаковых: рубин+изумруд – в 2 алмаза, алмаз+изумруд – в 2 рубина, алмаз+рубин – в 2 изумруда. Может ли он за несколько оборотов сделать все 45 камней одинаковыми?

**ИШ10\*.** На прямой отмечены две точки – красная и синяя. Разрешается добавлять или стирать пару красных или пару синих отмеченных точек, если между ними нет других отмеченных точек. Можно ли добиться, чтобы были отмечены те же точки, но красная стала синей, а синяя – красной?