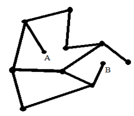
Увидеть чередование. Двудольный граф

1. а) *Хромая ладья* ходит на одну клетку по вертикали или горизонтали. Может ли она обойти клетчатую доску 7х7, побывав и на каждой клетке по разу и вернуться на исходную клетку последним ходом?

б) На доске 8х8 отмечены угловые клетки А, Б, В и Г. Шахматный конь прошел по маршрутам АБ, АВ и АГ. Могло ли число ходов на всех маршрутах быть одинаковым?



в) Блоха делает каждый прыжок в соседнюю вершину графа (см. рис). Может ли она пройти из А в Б ровно за 10 прыжков? А ровно за 9?

Вопросы. **а)** Сколько ходов должна сделать хромая ладья?
б) Каковы чётности числа ходов на маршрутах АБ, АВ и АГ?
в) Чем похожи решения пунктов (а), (б) и (в)?
Совет. Ситуацию с ходами часто можно нарисовать или хотя бы представить в виде графа, где рёбра – ходы, а клетки или позиции – вершины. Чередование обеспечивается «шахматной» раскраской вершин в два цвета.

Определение. Граф ходов фигуры: клетки – вершины, ходы – ребра. Мы их так и будем называть: граф коня, граф слона, граф короля, граф хромой ладьи и т.д.
Вопрос. Какой из этих графов будет графом карты?
Ответ. Граф хромой ладьи: страны – клетки.

Определение. Граф – *двудольный*, если его вершины можно раскрасить в два цвета так, что концы каждого ребра будут разного цвета.
Примеры двудольных графов: а) граф шахматного коня; **б)** граф куба; **в)** граф карты клетчатой доски.
Важный момент. На маршруте по рёбрам двудольного графа цвета вершин строго *чередуются*.

2. а) Можно ли покрасить вершины 20-угольника в два цвета так, чтобы концы каждой стороны были разного цвета? **б)** А вершины 19-угольника?

3. Можно ли раскрасить клетки шахматной доски в два цвета, так чтобы
а) любой ход короля вёл на клетку противоположного цвета?
б) а любой ход *хромого слона?* (он ходит на одну клетку по диагонали)
Вопрос. Попробуем раскрашивать клетки правильно, начав с одной белой клетки и закрашивая по одной соседей уже покрашенных. Возникнет ли противоречие в пункте (а)? А в пункте (б)?

Важный момент. В двудольном графе не может быть *нечётного цикла.* Поэтому если в графе есть нечётный цикл (узкое место), то граф НЕ двудольный. А вот графы чётных циклов и деревьев (это графы без циклов) – двудольны.

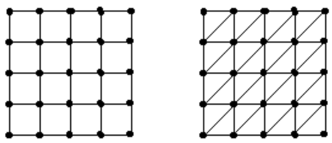
Теорема. Граф – двудольный <=> в графе нет нечётных циклов (т. е. нет замкнутых путей из нечётного числа рёбер).
Доказательство. Если в графе сеть нечётный цикл, то даже его нельзя правильно раскрасить, тем более нельзя весь граф.
Если нечётных циклов нет, красим любую вершину А в белый цвет, её соседей – в чёрный, соседей чёрных соседей – в белый и т. д. Допустим, случилась проблема – не можем покрасить вершину Б, потому что у неё уже есть и белая соседка, и чёрная. Тогда от А до Б есть маршрут из нечётного числа рёбер через белую соседку и чётный маршрут – через чёрную. Объединив эти два маршрута в один замкнутый цикл, получим нечётный цикл. Противоречие.

4. а) Блоха прыгает по целым точкам числовой прямой прыжками длины 3, 5 и 7. Может ли она вернуться в исходную точку, совершив ровно 35 прыжков?
б) Блоха прыгает по целым точкам числовой прямой. С числа a оно может прыгнуть на одно из чисел $2a$, $3a$, $a/2$, $a/3$. Может ли блоха ровно за 12 прыжков допрыгаться с числа 12 до числа 1?
в) Две фишки вначале стоят в противоположных клетках полоски 1х10. Они ходят по очереди, каждым ходом на соседнюю клетку. Могут ли фишки после 11 ходов оказаться на соседних клетках? (Один ход — это ход одной фишки)
г) Четыре фишки вначале стоят в углах доски 5х5. Они ходят в любом порядке, каждым

ходом на соседнюю по стороне клетку. Могут ли фишки после 25 ходов собрател в четырёх клетках квадртика 2х2?
д) Две блохи прыгают по целым точкам числовой прямой. Каждым прыжком блоха должна перепрыгнуть через другую. Вначале блоха А была на точке 1, блоха Б – на точке 2. Могут ли они за 12 прыжков поменяться местами?
е) Три блохи А, Б, В прыгают по целым точкам числовой прямой. Каждым прыжком блоха должна перепрыгнуть ровно через одну другую. Вначале А была на точке 1, Б – на 2, В – на 3. Могут ли они за 32 прыжка оказаться на тех же точках в обратном порядке?

Вопросы. а) Можно ли раскрасить точки правильно по отношению к прыжкам блохи?
б) В какие точки может попасть блоха? Удаётся ли их правильно раскрасить?
Какое свойство есть у каждой доли?
в) Какое свойство чередуется *у пары* фишек?
г) Какое свойство, связанное с чётностью, чередуется у четвёрки фишек.
д) Какое свойство чередуется *у пары* фишек?
е) Для каждого расположения блох запишем слева направо слово из букв А, Б, В. Раскрасим слова правильно. Какие группы получатся?

Зачётные задачи



УД1. На рисунке квадрат 4х4 разбит на клетки: слева — на квадратные, справа – на треугольные. Рассмотрим каждый рисунок как граф: вершины – вершины клеток, рёбра – стороны клеток. Какие из этих графов двудольны? У двудольных раскрась вершины правильно в два цвета.

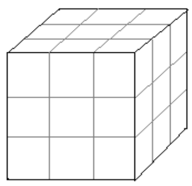
УД2. Нарисуйте двудольный граф с 6 вершинами и 9 рёбрами (рёбра могут пересекаться).

УД3. Клетчатая сетка разбивает бумагу на квадратные клетки 1х1. По линиям сетки нарисован многоугольник. Может ли его периметр быть нечётным?

УД4. Блоха прыгает по целым точкам числовой прямой прыжками длины 6 и 10. Может ли она за 8 прыжков
а) попасть с точки 0 на точку 33?
б) попасть с точки 0 на точку 32?
в) попасть с точки 0 на точку 22?

УД5. *Летучая ладья* ходит по горизонтали и вертикали на любое расстояние, но не может ходить на соседнюю клетку. Двудолен ли граф летучей ладьи
а) На доске 4х4?
б) На доске 5х5?

УД6. Дан кубик Рубика 3х3х3.



а) *Вершины клеток* на поверхности кубика объявили вершинами графа, а стороны клеток объявили ребрами графа. Двудолен ли полученный граф? Сколько в нём вершин и ребер?
б) Кубик Рубика 3х3х3 объявили планетой, а клетки на его поверхности кубика объявили странами. вершинами графа, а если у двух клеток есть общая сторона, они связаны ребром. Двудолен ли граф карты такой планеты? Сколько в нём вершин и ребер?

УД7. Блоха прыгает по двузначным числам прыжками длины 1 и 10, но запрещены прыжки длины 1 между числами из разных десятков (например, нельзя прыгнуть с 29 на 30 или обратно, но можно с 40 на 30 или с 19 на 29). Может ли блоха ровно за 23 прыжка попасть с числа 23 на число 32?

УД8. За какое наименьшее число ходов шахматный конь может дойти из одного угла доски 20х20 в противоположный угол?

УД9. На клетчатой полоске 1x10 стоят две одинаковые фишки. Они ходят, не обязательно по очереди. Каждым ходом одна из фишек сдвигается на свободную соседнюю клетку. Так они ходили, пока все возможные позиции не встретились хотя бы по разу.
а) Докажите, что какая-то позиция встретилась не один раз.
б) Какое наименьшее число ходов могло быть сделано?

УД10*. В противоположных углах доски 8x8 стоят две хромых ладьи Петя и Вася. Они ходят по очереди, начинает Петя. Ход пропускать нельзя. Выиграет тот, кто съест другого. Кто из них может выиграть, как бы ни играл соперник?