

Симметричные и дополнительные пары

1. Даше подарили шесть кубиков: синий, зелёный, алый, белый, оранжевый и розовый. Даша строит из них шестиэтажные башни.

- а) Сколько всего есть вариантов построить башню?
- б) А так, чтобы белый кубик был выше алого?

Вопросы. а) Строим башню снизу вверх. Сколькими способами можно выбрать нижний кубик? А второй кубик?

б) Как превратить башню, где алый выше белого в такую, где белый выше алого – без разрушения башни в процессе? Башен какого вида больше?

Совет. Варианты можно разбить на хорошие и плохие. Если их удастся разбить на пары (хороший, плохой), то тех и других поровну, а хороших – половина от всего.

Факт. Варианты получаются друг из друга *перестановкой* кубиков. Если все кубики разные, и все перестановки разрешены, то всего у n элементов есть $n! = n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \dots \cdot 2 \cdot 1$ перестановок.

2. Для опасной работы в шахте Белоснежка должна выбрать пять гномов из семи. Сколькими способами она может это сделать?

Вопросы. Как коротко объяснить, кому сегодня идти в шахту?

Что можно использовать как короткий код выбора?

Совет. Для неупорядоченного набора X часто парным будет *дополнение*: все элементы, кроме элементов X . Может оказаться, что дополнительные наборы пересчитать легче.

3. а) У скольких трёхзначных чисел все цифры различны?

б) Сколько трёхзначных чисел, где все цифры различны, *уменьшатся* при записи их задом наперёд?

в) Сколько трёхзначных чисел, где нет нуля, но могут быть одинаковые цифры, *увеличатся* при записи их задом наперёд?

Вопросы. а) Подбираем цифры слева направо. Сколькими способами можно выбрать первую цифру? А вторую? А третью?

б) Обязательно ли перевёрнутое число трёхзначно?

Что делать, если перевёрнутое число начинается на 0?

Сколько всего чисел надо рассмотреть, включая перевёрнутые?

в) Какие числа при переворачивании не увеличатся и не уменьшатся? Сколько таких?

Совет. Симметрия может разбивать на пары не все случаи: некоторые самосимметричны, для других симметричного случая нет. Если такие исключения легко сосчитать, то и счёт хороших случаев упрощается.

4. а) Среди трёхзначных кодов от 000 до 999 каких больше и на сколько: с суммой цифр 10 или с суммой цифр 17?

б) Среди трёхзначных чисел каких больше и на сколько: с суммой цифр 10 или с суммой цифр 17?

Вопросы. а) У какого трёхзначного числа сумма цифр равна $10+17$?

Как из кода с суммой цифр 10 получить код с суммой цифр 17 и наоборот?

б) Чем трёхзначные числа отличаются от трёхзначных кодов?

На сколько трёхзначных кодов с суммой цифр 10 больше, чем трёхзначных чисел с той же суммой цифр? А с суммой цифр 17?

Совет. Дополнение возможно и для чисел: парное число дополняет наше до постоянной суммы.

Зачётные задачи

СП1. а) У скольких пятизначных чисел все цифры разные и нечётные?

б) У скольких из этих чисел первая цифра больше последней?

СП2. а) Выписаны все слова, составленные из трёх разных букв слова ТРОПА. У скольких из них слово, записанное задом наперёд, идёт в словаре раньше?

б) Выписаны все слова, составленные из четырёх разных букв слова АПОРТ. Во скольких из них буква П стоит левее буквы Р?

СП3. У скольких девятизначных чисел цифры идут строго по убыванию?

СП4. а) У скольких трёхзначных чисел-палиндромов сумма цифр равна 7?

б) У скольких пятизначных чисел-палиндромов сумма цифр равна 7?

СП5. Назовём натуральное число *хорошим*, если его чётность совпадает с чётностью его суммы цифр (например, 666 и 2021 – хорошие, а 57 и 1998 – нехорошие).

а) Среди трёхзначных чисел каких больше: хороших или нехороших?

б) Сколько хороших среди чисел от 1 до 1000?

СП6. Назовем трехзначное число *бугром*, если его вторая цифра больше двух других, и *ямой*, если вторая цифра меньше двух других. Чего больше: бугров или ям, и на сколько?

СП7. Среди натуральных чисел меньших 10000 с суммой цифр 18 каких больше: чётных или нечётных, и на сколько?

СП8. В клетки таблицы 6×8 нужно вписать числа $1, 2, 3, \dots, 48$. Каких способов больше: тех, где в крайних клетках ровно 7 простых чисел или тех, где простых на краю ровно 8?

СП9. Есть 2 ряда по 10 стульев. Сколькими способами можно рассадить на них 10 человек разного роста так, чтобы в каждом ряду были заняты места только в начале ряда (слева), и в каждом ряду рост возрастал слева направо.

Онлайн-кружок 6 класса, 6 марта 2026 г, <http://www.ashap.info/Uroki/Mmoln/2025-26/index.html>