

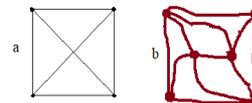
## Графы: свойства степеней вершин

**Определение.** Граф карты: вершины – страны, ребра – пары стран-соседей (то есть, с общим участком границы). По карте легко нарисовать привычный рисунок графа: отметим столицы стран как вершины, а столицы соседних стран соединим дорогой (см. рис.). Тогда степень вершины – это число соседей у страны.



1. а) Придумайте карту, граф которой изображен на рисунке (а).

б) Квадратный остров разделён на прямоугольные страны. На ночном снимке видны только столицы и соединяющие их главные дороги (рис. (б)). Восстановите карту.



**Вопросы.** а) Можно ли нарисовать этот граф так, чтобы рёбра не пересекались?

б) Можно ли нарисовать карту, где страны не прямоугольны?

А с прямоугольными странами, где остров не квадратный?

2. Посчитайте во всех нарисованных графах сумму степеней всех вершин и число рёбер. Как связаны между собой эти числа? Сформулируйте теорему о сумме степеней вершин и докажите её.

**Теорема.** Сумма степеней вершин вдвое больше числа рёбер графа.

**Доказательство.** Разрежем каждое ребро на две половинки. Степень равна числу половинок, выходящих из каждой вершины. В сумме степеней каждая половинка учтена ровно по разу, поэтому сумма равна общему числу половинок. Но половинок вдвое больше чем рёбер.

3. На континенте 7 стран.

а) Может ли у 4 стран быть в ровно по 3 соседа, у 3 стран – ровно по 4 соседа?

б) Может ли у 4 стран быть в ровно по 4 соседа, у 3 стран – ровно по 3 соседа?

**Вопросы.** Можно ли посчитать число рёбер в графе карты, не рисуя ни графа, ни карты?

**Лемма о рукопожатиях.** В графе число вершин нечётной степени – чётно.

**Доказательство.** Сумма степеней чётна, так как равна удвоенному числу рёбер. Значит, в этой сумме чётное число нечётных слагаемых.

4. В графе 6 вершин, возле каждой написана её степень. Каково наибольшее количество различных чисел среди написанных?

**Вопросы.** Какие значения степени могут встретиться в этом графе?

Есть ли в этом графе степени, которые не могут встретиться одновременно?

**Лемма о повторении степеней.** В любом (конечном) графе найдутся две вершины одинаковой степени.

**Доказательство.** Если в графе  $N$  вершин, то возможны  $N$  значений степени от 0 до  $N-1$ . Однако степени  $N-1$  и 0 не могут встретиться одновременно: вершина степени  $N-1$  соединена со всеми другими, и тогда степени всех вершин больше 0. Значит, разных степеней не более  $N-1$ , и по принципу Дирихле какая-то степень повторится.

5. Среди степеней вершин графа нашлось четыре различных нечётных числа.

а) Каково наименьшее количество вершин в таком графе?

б) Каково наименьшее количество рёбер в таком графе?

**Вопросы.** Что можно сказать о числе вершин в графе, где есть вершина степени 5?

а) Что можно сказать о вершине наибольшей степени в таком графе?

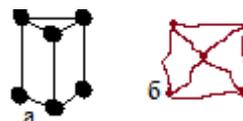
б) Как наиболее экономно проводить рёбра из вершин с заданными степенями?

**Совет.** При заданных степенях некоторых вершин сэкономить число вершин и рёбер поможет жадный алгоритм.

### Для самостоятельного решения

ГС1. а) Придумайте карту, граф которой изображен на рисунке (а).

б) Квадратный остров разделён на прямоугольные страны. На ночном снимке – см. рис. (б), видны только столицы и соединяющие их главные дороги. Восстановите карту.



ГС2. В графе 5 вершин, степень каждой – не больше 3. Какое наибольшее число рёбер в таком графе?

ГС3. На острове 5 городов, а дороги между городами должны быть прямыми и не проходить через другие города (но могут пересекаться).

- а)** Каково наибольшее число дорог на острове?  
**б)** Может ли на карте острова при наибольшем числе дорог быть только одно пересечение дорог?

**ГС4. а)** На столе лежат 5 монет, их размеры не обязательно одинаковы. Каждая золотая монета касается ровно трёх других монет (золотых и не золотых вместе). Каково наибольшее число золотых монет?

**б)** На столе лежат 6 монет. Все золотые монеты касаются разного числа монет. Каково наибольшее число золотых монет?

**ГС5. а)** В 13-угольнике провели 30 диагоналей, при этом из 3 вершин выходит по 3 диагонали, из 4 вершин – по 4 диагонали, из 5 вершин – по 5 диагоналей. Сколько диагоналей проведено из последней вершины? (*Диагональ* – это отрезок с концами в несоседних вершинах многоугольника)

**б)** На космической станции несколько помещений. Если у двух помещений есть общая стена, то между ними есть люк (для экономии люк один, даже если общих стен несколько). Известно, что в каждом помещении 6 люков, а всего на станции 36 люков. Сколько помещений на станции?

**ГС6.** Все степени вершин графа чётны и среди них есть пять различных чисел.

**а)** Каково наименьшее количество вершин в таком графе?

**б)** Каково наименьшее количество рёбер в таком графе?

**ГС7. а)** Можно ли разбить квадрат на 7 треугольников так, чтобы каждый граничил (по отрезку ненулевой длины) ровно с тремя другими треугольниками?

**б)** Можно ли разбить квадрат не больше чем на 8 треугольников так, чтобы каждый граничил (по отрезку ненулевой длины) ровно с тремя другими треугольниками?

**ГС8.** В графе с 9 вершинами каждые две вершины соединены ребром. Каждое ребро покрашено в какой-нибудь цвет так, что нет рёбер одинакового цвета, выходящих из одной вершины.

**а)** Может ли быть использовано ровно 8 цветов?

**б)** Может ли быть использовано ровно 9 цветов?

**ГС9.** В футбольном турнире каждая команда сыграла с каждой другой ровно по разу (такой турнир называется *однокруговым*).

**а)** Могут ли все команды сыграть вничью разное число матчей?

**б)** Могут ли все команды одержать разное число побед?

**ГС10.** В Волшебной стране из Изумрудного города выходят 33 жёлтые дороги, из всех других городов – по 4 такие дороги, из замка Бастинды – 3 такие дороги, а из всех остальных замков – по 2 такие дороги. Дороги соединяют только замки и города и больше нигде не пересекаются. Докажите, что из замка Бастинды по жёлтым дорогам можно дойти до Изумрудного города.

**ГС11.** Платон по очереди заполняет клетки таблицы  $6 \times 7$ , каждый раз вписывая в пустую клетку число ее заполненных соседей (по стороне). Докажите, что сумма всех 42 чисел не зависит от порядка заполнения и найдите эту сумму.