

Графы: города и дороги

1. Маги путешествуют между городами только через линии телепорта. Пока что они сумели открыть такие линии из Осло в Вену и Ригу, из Берна – в Вену и Рим, из Каира – в Баку, Дели и Сеул, из Рима – в Вену и Ригу, из Сеула – в Дели. По линии можно путешествовать в обе стороны.

а) Может ли маг из Берна добраться в Баку?

б) Какой самый длинный круговой маршрут можно совершить по линиям, не повторяя города?

Вопросы. Как наглядно изобразить схему городов и линий телепорта?

Советы. Схема городов и дорог может быть связной и несвязной. Несвязная схема распадается на связные части (компоненты).

2. а) Блоха скачет по числам от 1 до 6 прыжками длин 3 и 4. Может ли она проскакать по всем числам, побывав на каждом по разу?

б) Две блохи могут по очереди скакать по числам 5, 6, 7, 8, 9, 10 прыжками длин 3 и 4. Нельзя скакнуть на занятое число. Вначале они сидят на числах 5 и 10. Могут ли блохи поменяться местами?

в) Можно ли числа от 10 до 15 расставить по кругу так, чтобы разность между соседними была 3 или 4?

Вопросы. Как наглядно изобразить схему возможных прыжков?

Можно ли нарисовать схему так, чтобы линии не пересекались?

Чем похожи и чем отличаются схемы для разных пунктов задачи?

Советы. Схему можно распутывать, считая точки пуговицами, а линии – нитями.

Линии могут обозначать не только дороги и прыжки, но и связи.

Наглядная схема поможет найти узкие места.

Определения. Скажем, что нарисован *граф*, если нарисованы его *вершины* (точки) и некоторые пары вершин связаны *рёбрами* (линиями).

Линии не проходят через другие вершины. Если пара вершин связана ребром, других линий между ними нет. Как именно нарисованы линии (криво или прямо) и пересекаются ли они вне городов – не важно.

Граф *связный*, если от любой его вершины до любой другой можно дойти маршрутом по рёбрам.

Несвязный граф распадается на *компоненты связности* (части, которые являются связными графами).

Степень вершины – это число выходящих из неё рёбер.

3. а) Нарисуйте связный граф с 7 вершинами, все степени 2.

б) Нарисуйте несвязный граф с 7 вершинами, все степени 2.

в) Нарисуйте пример связного графа с 8 вершинами, все степени 3.

Вопрос. Можно ли зайти в тупик, путешествуя по графу с вершинами степени 2?

Встречались ли вам раньше полученные графы?

Советы. Многие известные картинки можно истолковать как графы.

Граф, где все вершины степени 2, состоит из одного или нескольких циклов.

4. а) На острове некоторые пары городов соединены скоростными линиями поездов. Каждый город соединен линиями не более чем с 4 другими. Из столицы острова можно доехать до каждого города напрямую или с одной пересадкой. Каково наибольшее число городов на острове?

б) На острове Гдетотам каждая страна граничит по суше не более чем с 4 другими. От страны Нуину можно по суше доехать до любой другой страны, пересекая не более двух границ. Какое наибольшее число стран может быть на этом острове?

Вопросы. а) В какое наибольшее число городов можно доехать без пересадки?

В какое наибольшее число городов можно доехать с одной пересадкой?

б) Как выглядит граф дорог между столицами соседей?

Совет. Если с конструкцией связан граф, можно построить сначала граф, а по нему – конструкцию.

Задачи на дом

ГД1. На окружности 10 точек пронумерованы цифрами 0, 1, ..., 9. Блоха может прыгнуть с одной такой точки на другую только если сумма номеров – точный квадрат. Нарисуйте схему всех возможных прыжков блохи в виде графа, посчитайте число рёбер в графе и обведите вершины наибольшей степени.

ГД2. а) Можно ли расставить по кругу несколько различных цифр так, чтобы для каждой пары соседей их отношение было простым числом?

б) Какое наибольшее количество цифр может быть в строке, где все цифры различны и для каждой пары соседей их отношение – простое число?

ГД3. а) Нарисуйте несвязный граф с 8 вершинами, все степени 3.

б) Может ли быть несвязным граф с 7 вершинами, все степени не меньше 3?

ГД4. На шахматной доске стоит несколько ладей белого и чёрного цвета. Все белые бьют разное число ладей. Каково наибольшее число белых? (Ладьи бьют друг друга, если они стоят на одной горизонтали или на одной вертикали и между ними нет других ладей.)

ГД5. Гости за круглым столом перессорились с соседями. После перерыва они решили сесть за стол так, чтобы те, кто раньше сидел рядом, теперь сели строго через одного. Удастся ли это, если всего за столом **а)** 9 человек; **б)** 10 человек?

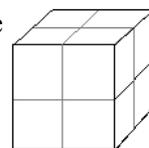
ГД6. Во дворе живут 5 пёсиков: Шарик, Гарик, Карик, Царик и Чинарик. Каждому из них случалось драться с кем-нибудь из остальных, причем у Шарика, Гарика, Карика и Царика число тех, с кем они дрались – разное. Со сколькими собаками двора дрался Чинарик?

ГД7. Квадратный остров разделен на прямоугольные княжества. Если у пары княжеств есть общий отрезок границы, их столицы соединены отдельной дорогой, а других дорог на острове нет.

а) Остров разделен на 6 княжеств. Нарисуйте пример карты острова с 11 дорогами.

б*) Остров разделён на 8 княжеств размера 2×1 . Какое наибольшее число дорог может быть на острове?

ГД8. В воздухе висит кубик Рубика $2 \times 2 \times 2$, чья поверхность разбита на единичные квадратные клетки. Муравей прополз от одной вершины клетки до другой, ползая по границам клеток, не поворачивая назад и не заходя ни в какую вершину повторно. Каков наибольший путь муравья?



ГД9* На Марсе каждый город связан прямыми тоннелями с тремя другими городами страны. Известно, что из любого города можно доехать тоннелями до любого другого напрямую или с одной пересадкой в другом городе. Какое наибольшее число городов может быть на Марсе?