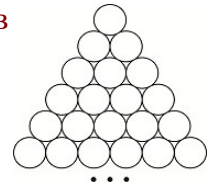


Треугольные числа, дороги и пары

Определение. Треугольным числом T_n называется количество билиардных шаров в треугольнике из n рядов, где в первом ряду 1 шар, во втором 2, в третьем 3 и т. д. (см. рис.).



1. а) Запишите в таблицу, сколько всего шаров потребуется для треугольника из 1, 2, ..., 10 рядов.

б) Можно ли закрасить клетки квадрата 8×8 в два цвета так, чтобы количество клеток каждого цвета было треугольным числом?

в) Почему сумма двух соседних чисел второй строки таблицы всегда точный квадрат?

г) Сколько всего шаров в треугольнике из 100 рядов?

Рядов	1	2	3	...	10
Шаров	1	3	6	...	

Вопрос. а) Как найти следующее число в таблице, зная предыдущее?

г) Как найти сразу 100-е число? N -е число?

Формула. $T_n = n(n+1)/2$.

2. В королевстве : а) 5 городов; б) 20 городов. Король повелел соединить каждые два города отдельной дорогой. Сколько дорог придётся построить?

Вопросы. а) Обозначим города буквами А, В, С, D, Е. Как коротко обозначить и выписать все дороги? Как выписать все коды дорог в виде треугольника?

б) Как выписать коды всех дорог, не записав никакую дорогу дважды?

Каждому мэру города велели построить половинки всех дорог из его города.

Сколько половинок ему строить?

Как закодировать половинки, чтобы не запутаться?

Правда ли, что в стране n городов надо построить T_n дорог?

Советы. Чтобы выписать все дороги, обозначим города буквами, а дорогу – парой букв-городов, соединённых этой дорогой. Важно только помнить, что дорога AD и дорога DA – одна и та же, чтобы случайно не сосчитать её дважды. Распространенная ошибка: вместо нужного треугольного числа берут соседнее. Чтобы не спутать, представьте ответ как сумму $1+2+\dots$ и поймите, какое число в этой сумме наибольшее.

Ещё не могут понять, нужно ли треугольное число удвоить – путают ситуации. Чтобы не спутать, проверьте на малых.

3. а) Встретились 13 художников. Каждый нарисовал по одной карикатуре на каждого из остальных. Сколько карикатур было нарисовано?

б) Встретились 13 певцов. Каждый спел по одной песне дуэтом с каждым из остальных. Сколько песен было спето?

в) Встретились 13 танцоров. Каждая группа из 11 танцоров выступила с танцем. Сколько танцев было показано?

Вопросы. Обозначим персонажей буквами А, Б, В, ..., К, Л.

а) Как написать краткий код карикатуры? Как записать коды в таблицу?

б) Как написать краткий код песни? Как записать коды в таблицу?

в) Как написать *краткий* код танца? Сколько в нём букв? Как записать коды в таблицу?

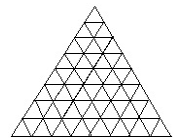
Совет. Пары бывают *упорядоченными* (я рисую, ты позируешь, AB и BA – обе можно написать, и они различны) и *неупорядоченными* (мы поём вместе, AB=BA, или можно писать только одну). Количество *неупорядоченных пар* из n объектов равно $C_n^2 = n(n-1)/2 = T_{n-1}$ (а не T_n).

Наборы, близкие к полным, удобно кодировать тем, что в них не входит. В частности, $C_n^{n-2} = C_n^2$

4. Треугольник из спичек разбит на треугольные клетки со стороной в одну спичку (см. рис.).

а) Сколько всего клеток?

б) Сколько всего спичек?



Вопросы. а) Как разбить треугольники на две группы так, чтобы численность каждой группы была треугольным числом?

б) Как разбить спички на группы так, чтобы численность каждой группы была треугольным числом?

Совет. Если треугольник разбит на части, число частей не обязательно треугольно. Но это повышает шанс выделить группы с треугольным числом частей.

5. В ресторане готовят кушанья из рыбы. Каждое кушанье делают из двух видов рыб и добавляют два вида соуса. Сегодня у повара есть 6 видов рыбы и пять видов соуса. Сколько разных кушаний

из рыбы может приготовить повар?

Вопросы. В основном меню блюда различаются только по входящим видам рыб. Сколько блюд в основном меню? Комбинации из двух соусов перечислены отдельно. Сколько этих комбинаций? Как можно устроить таблицу кушаний?

Совет. Считая объекты и варианты, разбивают их на группы. Размеры некоторых групп могут быть треугольным числом. Но окончательный ответ получают сложением, вычитанием и умножением размеров групп.

Зачётные задачи

ТЧ1. В хоккейном турнире каждая из 12 команд-участниц сыграла по одному разу с каждой другой.

а) Сколько всего матчей сыграно?

б) Командам давали по 2 очка за победу в матче, по 1 очку за ничью и 0 за поражение. Найдите сумму очков, набранных всеми командами.

ТЧ2. У скольких двузначных чисел сумма цифр двузначна?

ТЧ3. Сколько диагоналей у 17-угольника? (Диагонали соединяют каждую пару не соседних вершин).

ТЧ4. Клетчатый прямоугольник P можно по границам клеток разрезать на 20 прямоугольных частей разной площади. Сторона клетки равна 1.

а) Какова наименьшая площадь P ?

б) Может ли периметр P быть меньше 62?

ТЧ5. У скольких натуральных чисел, меньших миллиарда, сумма цифр равна **а)** 2; **б)** 79?

ТЧ6. Найдите все треугольные числа с суммой цифр 1.

ТЧ7*. Сколько решений имеет ребус $P < P < И < Д < У < М < А < Й$, где разными буквами обозначены разные цифры?

ТЧ8*. Восемь рассеянных путешественников перепутали ключи от своих номеров. На попытку (удачную или неудачную) открыть дверь каким попало ключом им требуется минута. Две двери одновременно они открывать не пытаются. Как за полчаса им разобраться, где чей ключ. (Каждый ключ открывает только свою дверь. Если удалось вычислить, какую дверь открывает ключ, открывать её не обязательно).

ТЧ9*. Сколькими способами можно из множества $\{1, 2, 3, \dots, 20\}$ выбрать набор из двух или более последовательных чисел? (Примеры: само множество, $\{3, 4\}$, $\{9, 10, 11\}$, $\{10, 11, \dots, 20\}$)

ТЧ10*. Сколькими способами можно закрасить одну или несколько клеток в клетчатом квадрате 9×9 так, чтобы был закрашен прямоугольник?