

Разминка на малых

Разминка – это похожая задача, но полегче. Решив легкую, применим найденные идеи и для сложной. Самый простой способ упрощения: изменить какое-то число в условии на меньшее.

1. Петя складывает из спичек клетчатые буквы П, у которых ширина равна высоте (см. рис). Сторона каждой клетки — одна спичка. Сколько спичек ему понадобится для П шириной и высотой



а) 3; б) 4; в) 5; г) 7; д) 20?

Вопросы. Что за ряд образуют ответы для малых размеров П?

Как меняется количество спичек при увеличении размера П на один?

Какой ответ для П размера N?

Как доказать этот ответ не используя формулы арифметической прогрессии?

Совет. Решив два-три малых случая, найдите числовую закономерность. Примените её, чтобы найти ответ для большого или даже общего случая. Докажите закономерность.

2. Можно ли расставить поровну плюсов и минусов в промежутки ряда чисел так, чтобы результат был равен 0

а) для ряда 1 2 3 4 5 6 7 8 9;

б) для ряда 1 2 ... 98 99?

Вопросы. Какие малые ряды могут помочь решить задачу?

На какие числа заканчиваются малые ряды, дающие результат 0?

Сколько чисел можно добавить в конец ряда с результатом 0 так, чтобы остался результат 0?

Советы. Не все значения параметра дают аналогичный результат. Нужные значения могут иметь определённую чётность, делимость или остаток.

Большие примеры («здания») могут достраиваться на основе маленьких пошаговым добавлением («надстройкой этажа за этажом»).

3. Назовем *уголком* клетчатую фигуру, составленную из двух прямоугольников толщины 1 (см. примеры серых уголков на рисунке).

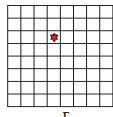
а) Торт сделан в виде клетчатого квадрата 5x5 с розочкой на угловой клетке. От него можно отрезать уголки с *нечётным* числом клеток без розочки и съедать, если кусок такой площади ты ещё не ел. Можно ли в одиночку съесть весь торт (кроме клетки с розочкой)?



а



б

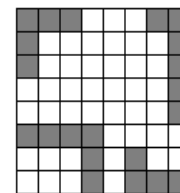


г

б) А торт со стороной в 20 клеток с розочкой на угловой клетке?

в) А торт 7x7 с розочкой на средней клетке верхней границы ?

г) А торт 8x8 с розочкой на не крайней клетке (см. рис)?



Вопросы. а) Как перевести задачу на более математический язык?

б) Почему тут не обязательно рисовать подробно квадрат 20x20?

в) Как можно получить решение из решения для квадрата 7x7 с розочкой в углу?

г) Какие вспомогательные квадраты можно использовать для получения решения?

Можно ли применить этот метод решения для любого клетчатого квадрата с розочкой в на любой клетке?

Совет. Решение большого случая может опираться на результат малого случая. Например, малая конструкция может быть частью большой.

4. а) Найдите такой набор из четырех гирь целого веса (в граммах), чтобы любую массу из 1, 2, 3, ..., 15 г можно было уравновесить одной или несколькими гирями.

б) Какое наименьшее число гирь может быть в наборе таком, чтобы любую массу из 1, 2, 3, ..., 100 г можно было уравновесить одной или несколькими гирями набора?

в) В наборе шесть гирь целого веса. Ими можно уравновесить любую массу от 1 до 49 г. Обязательно ли ими можно уравновесить вес 50 г?

Вопросы. а) Какая наименьшая по весу гиря должна быть в наборе? А вторая по весу? А третья по весу? Действует ли здесь жадный алгоритм?

б) Сколько разных масс можно уравновесить двумя гирями? А тремя? А шестью?

в) Обязательно ли самая тяжёлая гиря должна весить 32 г?

Совет. Представление натурального числа как суммы различных степеней двойки единственно, и применяется часто. Его полезно использовать и, при необходимости, «подправлять».

Зачётные задачи

PM1-PM4 сдать до 18:00 30 января

PM1. Платон любит клетчатые буквы П толщиной 1, у которых ширина равна высоте (см. рис. в задаче 1). Может ли Платон вырезать 12 таких П разной площади из клетчатого квадрата 25x25?

PM2. Получите верное равенство заменой # на равное число плюсов и минусов: $99\#98\#\dots\#2\#1=50$.

PM3. Из 16 спичек можно сложить ромб со сторонами в две спички, разбитый на треугольники со стороной в одну спичку (см. рис). А сколько спичек понадобится, чтобы сложить такой ромб со сторонами в 10 спичек?



PM4. а) Разрежьте прямоугольник 2×5 по границам клеток на 2 не прямоугольные фигуры разной площади.

б) Придумайте 3 не прямоугольные клетчатые фигуры разной площади такие, чтобы из любых двух можно было сложить прямоугольник.

в) Придумайте 7 не прямоугольных клетчатых фигур разной площади таких, чтобы из любых двух можно было сложить прямоугольник.

PM5. Есть лист клетчатой бумаги, сторона клеток равна 1. Рисовать можно только по линиям сетки. Нарисуйте **а)** четырёхугольник площади 1; **б)** 12-угольник площади 5; **в)** 20-угольник площади 9; **г)** 100-угольник площади 49.

PM6. В колонну стоят 100 жителей острова Рылж, все знают, кто есть кто. Каждый из них сделал по одному заявлению. Начиная с третьего спереди жителя все заявления были «Спереди от меня более трети – лжецы». Сколько всего лжецов среди них?

PM7. а) Есть 49 монет достоинством в 1, 2, 3, ..., 49 динаров. Какое наибольшее число людей могут разделить эти деньги поровну?

б) Есть 50 монет достоинством в 1, 2, 3, ..., 50 динаров. Какое наибольшее число людей могут разделить эти деньги поровну?

PM8. Есть двухчашечные весы. При взвешивании груза гири можно класть *на одну или на обе чаши* весов.

а) Найдите набор из четырёх гирь, которыми можно уравновесить каждую массу из 1, 2, 3, ..., 40 г.

б) Найдите набор из пяти гирь общим весом 100 г, которыми можно уравновесить каждую массу из 1, 2, 3, ..., 100 г.

PM9. а) Найдите два числа, которые не делятся друг на друга, но квадрат каждого из них делится на другое.

б*) Найдите три числа, которые не делятся друг на друга, но квадрат каждого из них делится на каждое из других.

PM10*. а) Можно ли клетки доски 49×49 раскрасить в два цвета так, чтобы каждая клетка граничила по стороне ровно с двумя клетками другого цвета?

б) Тот же вопрос для доски 64×64 ?