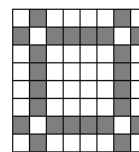


РАСКРАСКА В ДВА ЦВЕТА, ДЕФИЦИТ, ЧЕРЕДОВАНИЕ

1. Клетки доски 8×8 раскрашены в два цвета (см. рис.). Доску разрезали на домино. Каково наибольшее число двуцветных домино?

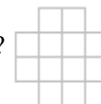


Вопросы. Сколько клеток каждого цвета?

Какой дефицит мешает нам получить больше двуцветных домино?

Советы. При раскраске в два цвета считайте или сравнивайте число элементов каждого цвета. Назначив один из цветов *дефицитным*, можно получить противоречие или оценку.

2. а) Какое наибольшее число *сторон клеток* можно закрасить в квадрате 4×4 без угловых клеток (см. рис.) так, чтобы закрашенные отрезки не соприкасались концами?



б) Какое наибольшее число *диагоналей клеток* можно закрасить в квадрате 4×4 (с угловыми клетками) так, чтобы закрашенные отрезки не пересекались и не соприкасались концами?

Вопросы. Как связано число вершин клеток с числом закрашенных сторон?

Можно ли раскрасить вершины в два цвета так, чтобы концы каждого отрезка были разного цвета?

Советы. Часто используется *шахматная раскраска*. Красить можно не только клетки, но и вершины. Если раскраски нет, можно раскрасить самим, выбрав подходящую раскраску.

Полезно раскрасить так, чтобы в каждой нужной паре (клеток домино, концов стороны, концов диагонали и т. п.) элементы были разного цвета. Такая раскраска называется *правильной*. Она помогает узнать, есть ли разбиение на пары или оценить число пар.

3. а) Шахматный конь прошел от левой нижней клетки доски 8×8 до правой верхней. Он двигался не самым экономным путём. Докажите, что число ходов чётно.

б) *Хромой слон* сдвигается за ход на одну клетку по диагонали. Он прошел от левой нижней клетки доски до правой верхней. Маршрут не был самым экономным. Докажите, что число ходов нечётно.

в) Длина ребра куба равна 11 сантиметров. Муравей бегает по ребрам куба, нигде не поворачивая назад. Стартуя из левой нижней передней вершины, он через некоторое время прибежал в правую верхнюю заднюю вершину. Докажите, что его путь равен нечётному числу сантиметров.

Вопросы. а) Какая раскраска доски поможет найти ответ для коня?

Какое свойство шахматной раскраски сделало её полезной?

б) Поможет ли шахматная раскраска решить задачу для хромого слона?

Какие клетки нам надо раскрасить для слона?

Каким свойством должна обладать раскраска, чтобы помочь решить задачу?

в) Какие точки нам надо раскрасить для муравья?

Можно ли раскрасить вершины куба в два цвета так, чтобы концы каждого отрезка были разного цвета?

Советы. Если делаются ходы, то *правильная раскраска* – это такая, когда цвет поля *чередуется* при каждом ходе. Тогда после чётных ходов цвет один, после нечётных – другой. В частности, при шахматной раскраске чередуют цвет ходы коня и хромой ладьи, а при полосатой – хромого слона.

Чередование большой друг *чётности*: оно позволяет найти чётность числа ходов на маршруте и доказывать невозможность некоторых маршрутов.

4. **Лемма.** Пусть на пути чередуются черные и белые клетки (или вершины), не повторяясь.

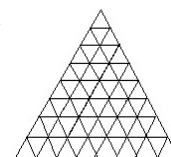
а) Если путь не замкнут, и концы – разного цвета, то на пути чёрных и белых клеток поровну.

б) Если путь не замкнут, и концы – одинакового цвета, то клеток «конечного» цвета на 1 больше, чем другого.

в) Если путь – замкнут, то клеток каждого цвета – поровну, а число шагов – чётно.

5. Замок в форме треугольника со стороной 40 метров разбит на 64 треугольных зала со сторонами 5 м. В каждой стенке между залами есть дверь (см. рис).

Какое наибольшее число залов сможет обойти турист, не заходя ни в какой зал дважды?



Вопросы. Можно ли разделить залы замка на две категории, чтобы каждая стенка отделяла залы разных категорий?

Считая, что турист делает ходы на треугольной доске, можно ли раскрасить эту доску правильно?

Советы. Правильные раскраски для чередования находить легче. Труднее раскрасить узкие места: вы должны почувствовать, что станет дефицитом.

Зачётные задачи

РЧ1-4 сдать не позднее 18:00 26 декабря

РЧ1. Дана доска в виде клетчатого квадрата 8×8 без двух угловых клеток: левой нижней и правой верхней.

а) Можно ли эту доску разрезать на домино 2×1 ?

б) На какое наибольшее число прямоугольников можно разрезать эту доску по границам клеток так, чтобы никакой из прямоугольников не был квадратом?

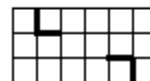
РЧ2. Хромая ладья ходит по вертикали и горизонтали на одну клетку. Пусть А – левая нижняя, а В – правая верхняя клетки доски 8×8 .

а) Может ли хромая ладья пройти из А в В, побывав в каждой клетке доски *ровно один раз*?

б) Хромая ладья прошла из А в В, побывав в каждой клетке доски (на некоторых, возможно, больше одного раза). Каково наименьшее возможное число ходов?

РЧ3. Юра не любит цифру 2. Из 30 карточек с числами от 1 до 30 он выкинул все с цифрой 2 в записи. Остальных карточки он разложил парами. В каком наибольшем количестве пар сумма может быть простой?

РЧ4. Из жесткой проволоки сделана клетчатая сетка 3×6 (см. рис). Её разрезали на части. Какое наибольшее число частей имеет форму буквы Г, составленной из двух целых сторон клетки? (Общая сторона двух клеток может войти только в одну букву Г. На рисунке сетка с примерами двух Г.).



РЧ5-10 сдать не позднее 18:00 9 января

РЧ5. Сделав 27 ходов, шахматный король вернулся на то поле, откуда стартовал.

а) Какое наибольшее число ходов он мог сделать *не по диагонали*?

б*) Какое наибольшее число ходов король мог сделать *по диагонали*?

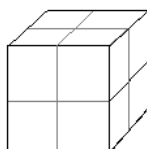
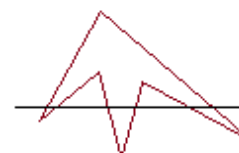
РЧ6. а) Можно ли раскрасить клетки доски 6×6 в черный и белый цвета так, чтобы всего белых и черных было не поровну, а в каждом прямоугольнике 1×4 – поровну?

б) Клетчатый квадрат 8×8 разрезали по границам клеток на прямоугольники не более чем из 7 клеток (не все одинаковые). Каждый прямоугольник покрасили в белый или чёрный цвет так, что прямоугольники одинакового цвета не соприкасаются друг с другом по отрезкам (могут касаться только вершинами). Обязательно ли количества белых и чёрных прямоугольников равны?

РЧ7. Для игры в классики на земле нарисован ряд клеток, в которые вписаны по порядку числа от 1 до 10 (см. рис). Полина прыгнула снаружи в клетку 1, затем попрыгала по остальным клеткам (каждый прыжок – на соседнюю по стороне клетку) и выпрыгнула наружу из клетки 10. Известно, что на клетке 1 Полина была 1 раз, на клетке 2 – 2 раза, ..., на клетке 9 – 9 раз. Сколько раз побывала Полина на клетке 10?

1	4	5	8	9
2	3	6	7	10

РЧ8. Прямая пересекает 5 пятиугольников, но не проходит ни через одну из их вершин. Каково наибольшее число точек пересечения? (На рисунке пример с 6 точками пересечения для шестиугольника).



РЧ9*. Поверхность кубика Рубика $2 \times 2 \times 2$ разбита на единичные квадратные клетки. Какое наибольшее число сторон этих клеток можно закрасить так, чтобы покрашенные отрезки не соприкасались концами?

РЧ10*. На доске написано число. Разрешается умножить или поделить его на любое простое число. Можно ли за 2000 таких операций из 1 получить 2000?