

АРИФМЕТИКА ЧЁТНОСТИ

Идея занятия: четность, важное свойство, которое легко отслеживать, и которое позволяет отсекать невозможные случаи.

1. а) Можно ли разложить гириками весами 1, 2, ..., 13 г на две чаши весов так, чтобы было равновесие?

б) Можно ли разложить гириками весами $1^2, 2^2, \dots, 13^2$ г на две чаши весов так, чтобы было равновесие?

Вопросы. Что можно сказать о сумме весов гирь при равновесии?

Можно ли определить чётность суммы $1+2+\dots+13$ (то есть узнать, чётна она или нечётна), не досчитав её до конца?

Можно ли определить чётность суммы $1^2+2^2+\dots+13^2$, зная чётность суммы $1+2+\dots+13$?

Как можно определить чётность суммы, зная чётность каждого слагаемого?

Советы. Чётные слагаемые не меняют чётность суммы.

Каждое нечётное слагаемое меняет чётность суммы.

Если количество нечётных слагаемых чётно, то и сумма чётна.

Если количество нечётных слагаемых нечётно, то и сумма нечётна.

2. Разность двух натуральных чисел умножили на их произведение. Могло ли получиться **а)** число 70; **б)** число 15015?

Вопросы. От чего зависит чётность разности?

От чего зависит чётность произведения?

Какая чётность может быть у произведения $ab(a-b)$?

Советы. Разность нечётна \Leftrightarrow числа разной чётности.

У суммы и разности чётности одинаковы.

Произведение нечётно \Leftrightarrow все сомножители нечётны.

3. а) Блоха 10 раз прыгнула по прямой вправо прыжками длины 1, 3 и 5 см. Могла ли она сместиться вправо ровно на 33 см?

б) А если некоторые прыжки были вправо, а остальные – влево, могла ли она за 10 прыжков сместиться вправо на 33 см?

Вопросы. Как выражается смещение арифметически через длины прыжков в пункте (а)?

А смещение в пункте (б)?

Изменится ли смещение, если сначала выполнить все прыжки вправо, а потом – все влево?

От чего зависит чётность смещения в (б)?

Как меняется чётность расстояния до старта при каждом прыжке?

Советы. Знак «минус» на чётность не влияет.

За чётностью удобно следить шаг за шагом.

Если все прыжки/слагаемые чётны, чётность не меняется.

Если все прыжки/слагаемые нечётны, чётность чередуется.

4. а) На столе лежит 10 монет решкой вверх. За одну операцию разрешается перевернуть любые 9 монет. Можно ли за несколько операций добиться, чтобы все монеты легли орлом вверх?

б) Тот же вопрос, если монет 7, а разрешается переворачивать по 6.

Вопросы. От чего зависит положение монеты, перевернутой несколько раз?

За чётностью чего здесь полезно следить при каждом шаге?

Советы. Если есть несколько объектов, чередующихся состояния (типа орел и решка), последите за чётностью числа объектов в данном состоянии (например, число решек).

Не меняющаяся при разрешённых шагах чётность – частный случай *инварианта*.

Если вначале одно значение инварианта, а в конце другой, то невозможно перейти разрешёнными шагами.

Если в начале и в конце одинаковое значение инварианта, то гарантии перехода всё равно нет. Но можно попытаться.

5. Луиза и Полина пошли в лес по грибы, каждая из них шла со своей мамой. Луиза собрала грибов столько же, сколько её мама, Полина тоже столько же, сколько её мама. Вместе они все собрали 75 грибов. Сколько грибов собрала Полина?

Вопросы. Достаточно ли данных для ответа?

Возможно ли такое? Сходится ли чётность?

Какое неявное предположение мы делаем, а в условии его нет?

Советы. Мешать решить задачу могут неявные ограничения, которые мы сами себе ставим. Если задача кажется противоречивой, уточните условие у преподавателя. Если скажут, что ошибки нет, ищите «вредное» неявное предположение.

Домашние задачи

Задачи АЧ1-АЧ4 сдавать до следующего занятия

АЧ1. Квадрат 8×8 разрезали по границам клеток на 20 прямоугольников из нечетного числа клеток каждый. Обязательно ли среди частей есть квадрат?

АЧ2. Блоха прыгает по прямой прыжками одинаковой длины, иногда вправо, иногда влево. Может ли она после 25 прыжков вернуться на точку старта?

АЧ3. Сумма S шести различных натуральных чисел чётна, а сумма цифр каждого слагаемого нечётна. Каково наименьшее S ?

АЧ4. В выражении $10*9*8*7*6*5*4*3*2*1=0$ заменили звездочки на знаки «+», «-», «×», «:» так, что получилось верное равенство (скобки не добавляли).

а) Докажите, что есть хотя бы один знак «×» или «:».

б) Приведите пример замены, дающей верное равенство.

АЧ5. В классе мальчиков на 7 больше, чем девочек. При голосовании «Идти в кино либо в театр» театр обошёл кино на 10 голосов. Докажите, что кто-то воздержался или не голосовал.

АЧ6. В клетках таблицы 5×6 записаны натуральные числа. Незнайка посчитал сумму в каждой строке и каждом столбце. У него получились суммы 30, 31, ..., 40 в некотором порядке. Докажите, что Незнайка где-то ошибся.

АЧ7. В ряд записаны числа 1, 2, 3, ..., 30. За ход разрешено поменять местами два числа, стоящих «через одно» (например, 9 и 11). Можно ли такими ходами переставить все числа в обратном порядке?

АЧ8. В вершинах квадрата записаны 4 натуральных числа, а на каждой стороне записали произведение чисел в концах этой стороны. Известно, что сумма чисел на сторонах квадрата нечётна. Сколько нечётных чисел может быть в вершинах квадрата? (Найдите все ответы).

АЧ9. Из книги выпал кусок из нескольких листов подряд. Номер последней страницы перед выпавшим куском – 254, номер первой страницы после выпавшего куска записывается теми же цифрами, но в другом порядке. Сколько листов выпало?

АЧ10*. Можно ли числа 1, 2, 3, ..., 20 так расставить в восьми вершинах и на двенадцати рёбрах куба так, чтобы число на каждом ребре равнялось полусумме чисел на концах этого ребра?

Дополнительная зачётная задача

АЧ11*. Можно ли в клетчатом квадрате 25×25 окрасить несколько клеток так, чтобы каждая клетка – и окрашенная, и неокрашенная – граничила по стороне ровно с одной окрашенной?