

Арифметическая прогрессия

Столбам, стоящим с равными промежутками между ними в математике соответствуют ряды чисел, идущих с одинаковым шагом. Такой ряд называется *арифметическая прогрессия*.

1. Граница купальной зоны отмечена прямым канатом, которые поддерживают буйки, пронумерованные по порядку. Между соседними буйками расстояние всегда равно 10 м.

а) Учась плавать, Саша проплыла без отдыха от 3-его до 13-го буйка. Какую дистанцию проплыла Саша?

б) Всего есть 33 буйка. Найдите расстояние между крайними буйками.

Вопросы. Сколько промежутков между 3-м и 13-м буйками?

А между 1-м и 33-м?

Как отличается общее число буйков от общего числа промежутков?

Совет. Промежутки считать легче: между k -м и n -м буйками $n-k$ промежутков. В частности, между 1-м и n -м буйками $n-1$ промежутков (минус один – от первого!), точек на 1 больше чем промежутков.

Часто задают лишь два-три первых члена арифметической прогрессии, подразумевая, что такой ряд каждый сможет продолжить.

2. В первый день пребывания в отеле «Всё включено» обжора Робин-Бобин съел 3 пирожных. Войдя во вкус, во второй день он слопал 7 пирожных, в третий день – 11 пирожных, в четвёртый – 15 и т. д. Робин-Бобин лопнет, если съест за день больше 55 пирожных. Отель он забронировал на две недели. Успеет ли Робин лопнуть?

Вопросы. С каким шагом идёт прогрессия чисел пирожных, съеденных за день?

Сколько чисел придётся написать, чтобы найти ответ?

Отметим эти числа точками на числовой прямой. Чему равна разница между крайними точками?

Можно ли найти число для последнего дня не выписывая промежуточные числа?

Определение. Ряд чисел $a_1, a_2, a_3, a_4, \dots$ называется *арифметической прогрессией*, если разность между соседними числами одна и та же $d=a_2-a_1=a_3-a_2=a_4-a_3=\dots$ (её называют *разностью* прогрессии). Если разность $d>0$, то прогрессия *возрастает*, а если меньше 0, то *убывает*.

3. Угадайте закономерность, найдите следующее число a_5 , определите, арифметическая прогрессия это или нет, и если «да», найдите её разность d .

а) 93, 95, 97, 99, ...

б) 21, 31, 51, 61, ...

в) 2025, 2018, 2011, 2004, ...

г) 1; 2,5; 4; 5,5; ...

Вопрос. Как проверить, что ряд чисел – арифметическая прогрессия?

Совет. Чтобы проверить, что длинный ряд – прогрессия, нужно общее рассуждения. Чтобы опровергнуть, хватит примера несовпадающих разностей. Многие виды чисел, если их записать по порядку, образуют прогрессию.

Свойства арифметической прогрессии. а) Между n -м и k -м числами прогрессии ровно $n-k$ шагов. Каждый шаг равен разности прогрессии d . Разность между n -м и k -м числами прогрессии $= (n-k)d$;

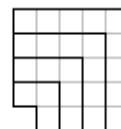
б) Если первое число прогрессии a , а разность d , то n -е число $= a+(n-1)d$.

Запомните: Арифметическая прогрессия обычно задаётся определяется первым членом и разностью. Но также она определяется любыми двумя членами с известными номерами.

4. Сколько натуральных чисел от 25 до 2025 заканчиваются на 5?

Вопрос. Как выстроить из этих чисел арифметическую прогрессию?

5. 100 уголков толщины 1 приложили один к другому как на рисунке (там показаны только 4 самых маленьких уголка. Сторона каждой клетки равна 1. Для 44-го по величине уголка найдите а) площадь б) периметр.



Вопрос. Какие величины, связанные с уголками, образуют арифметическую прогрессию? Какие разности у этих прогрессий?

Совет. Если есть серия конструкций увеличивающихся размеров, выберите наиболее простой размер и проверьте, не растёт ли он как арифметическая прогрессия.

Зачётные задачи

АП1. На числовой прямой отметили 100 точек так, что расстояние между соседними точками одно и то же. Точки пронумеровали по порядку слева направо. Оказалось, что расстояние между 3-ей и 33-й

точками равно 240, а координата 8-й точки равна 100.

Найдите **а)** длину промежутка между соседними точками;

б) координату 3-й точки.

АП2. Выписали по порядку чётные натуральные числа, не кратные 4. Найдите 51-е такое число.

АП3. Разрежьте по границам клеток прямоугольник 5×9 на 9 меньших прямоугольников, чьи периметры различны и образуют арифметическую прогрессию.

АП4. Арифметическая прогрессия состоит из 101 числа. Первое равно 111, последнее 1111.

Определите, на каком месте стоит среднее число прогрессии и найдите его.

АП5. Записали 1000 членов арифметической прогрессии 6, 13, 20, 27, 34, ... Какая самая маленькая сумма цифр может быть у числа в этой прогрессии.

АП6. Петя составил программу, которая печатает по порядку числа от 1 до 111 на длинной ленте.

Увы, он забыл про пробелы, поэтому начала печататься строка цифр 123456789101112...

а) Сколько всего цифр в строке?

б) На ленте была клякса, и 99-я цифра строки нечитаема. А какая там напечатана цифра?

АП7. Вокруг стола пустили пакет с семечками. Первый взял одну семечку, второй – две, третий – три, и так далее: каждый следующий брал на одну семечку больше. Известно, что на втором круге было взято в сумме на 100 семечек больше, чем на первом. Сколько человек сидели за столом?

АП8. Записана арифметическая прогрессия из 100 чисел.

а) Известно, что первый, десятый и сотый члены прогрессии – натуральные числа. Обязательно ли 99-ый член этой прогрессии – натуральное число?

б) Известно, что более половины членов этой прогрессии – целые числа. Обязательно ли 77-й член этой прогрессии – целое число?